Semantiske teorier og fullstendighetsbevis for den doxastiske predikatlogikken Kη+

Arbeidsnotat

av

Morten Rognes

2007

© 2008 Morten Harboe Rognes

§1 Innledning

Dette arbeidet er en videreføring av skriftet Rognes [1], *Noen syntaktiske derivasjoner i den doxastiske predikatlogikken Kη og enkelte beslektede kalkyler*. I Rognes [1] definerte vi rent syntaktisk en viss doxastisk logikk, vi kalte den Kη. Hovedformålet i det skriftet var så å gi leseren en oversikt over hva som kunne utledes av teoremer i denne kalkylen. Studerer man Rognes [1] ser man at det faktisk ikke er så rent lite. I det nevnte arbeid studerte vi også en svakere kalkyle Kη-. I tillegg studerte vi også egenskapene til en rekke utvidelser av Kη.

Det er naturligvis intet galt i å studere en kalkyle fra en rent syntaktisk synsvinkel. Men ønsker man å besvare spørsmål som har med uavhengighet, konsistens og en rekke andre forhold å gjøre, er det ofte vanskelig å løse slike spørsmål ved hjelp av rent syntaktiske metoder. Det kan derfor være hensiktsmessig å forsøke å formulere en semantisk teori. Å gjøre dette i forbindelse med kalkylen Kη og en rekke beslektede kalkyler er hovedformålet med dette skrift.

Et karakteristisk trekk ved de kalkylene vi studerte i Rognes [1] er at selvom to formler α og β er logisk ekvivalente behøver ikke derfor det forhold at x tror at α å være ekvivalent med det forhold at x tror at β. Dette vil bare være tilfelle om vi forutsetter at trosfeltet til x er rasjonelt organisert. Man ser derfor at semantiske teorier for kalkyler av typen Kη må inneholde elementer som man ikke finner i de vanlige standardsemantikkene for vanlige, normale, kalkyler i modallogikken.

Dette arbeidet kan egentlig sies å falle i to deler. I den første delen spesifiserer vi tre semantiske teorier for formelle språk av den typen vi kaller språk for doxastisk logikk. Disse teoriene er i en viss forstand basert på forskjellige grunnleggende ideer. Den type modellstrukturer som innføres i den første teorien er basert på noe vi her kaller unormale verdener. I de normale, klassiske, mulige verdener tilordnes formlene som inneholder de vanlige predikatlogiske konnektiver sannhetsverdier etter de vanlige regler. I de unormale verdenene behøver dette ikke å være tilfelle. I en slik verden kan man for eksempel ha at at to formler α og α→β tilordnes sannhetsverdien sann, mens β tilordnes sannhetsverdien usann.

I den andre teorien innfører vi en annen type modellstrukturer hvor det vi kaller "finstrukturerte" utsagn spiller en avgjørende rolle. Vanligvis vil man anse to setninger som henholdsvis har formen α og ¬ ¬ α uttrykker det samme utsagn. De vil være logisk ekvivalente. Men i denne andre semantiske teorien innfører vi et utsagnsbegrep hvor disse to setningene ikke nødvendigvis behøver å uttrykke det samme utsagn. Det kan altså være mulig for et individ x å tro at det utsagnet som uttrykkes av den første formelen er sant, mens vedkommende ikke tror at det utsagnet som uttrykkes av det andre utsagnet er sant. Det er nødvendig å innføre disse endringene i den vanlige semantiske teori for å unngå at logisk ekvivalente formler skal være substituerbare salva veritate i doxastiske kontekster.

I den tredje semantiske teorien imfører vi et knippe av alternativrelasjoner indeksert på mengden av alle de individer i domenet hvor trosfeltet er rasjonelt organisert. Utsagnene i denne typen modellstrukturer representeres på en litt annen måte enn i de to førstnevnte teoriene.

I den første delen av vårt arbeid , §4 - §12, fremstiller vi disse semantiske teoriene presist. Vi viser i denne forbindelse en lang rekke teoremer om hvordan modellstrukturene av de forskjellige typene er relatert til hverandre. Hovedsakelig kan man, med visse forbehold, si at de tre teoriene er ekvivalente. I den andre delen av dette skrift tar vi opp spørsmålet om fullstendighet. Det viser seg, gitt den type semantiske teorier vi har utformet, at det er mulig å

© 2008 Morten Harboe Rognes

gi et fullstendighetsbevis for noen av de kalkylene vi har spesifisert. De resultatene vi har kommet frem til i denne forbindelse gjør vi rede for i §13 - §19.

Vi vil nå gjøre noe mer detaljert rede for innholdet i dette skrift. I §2 defineres presist den type formelle språk som vi arbeider med. Vi kaller språkene for språk for doxastisk logikk. Et slikt språk L er et vanlig predikatlogisk språk utstyrt med de vanlige setningslogiske konnektivene, de to standardkvantorene og identitet. I tillegg inneholder et slikt språk operatoren "T;x(α)", der x er et variabeltegn og α en formel. "T;x(α)" leses "x tror at α er tilfelle". I tillegg til disse uttrykkene inneholder et språk for doxastisk logikk predikatet "η(x)" som kan leses "trosfeltet til individet x er logisk sett rasjonelt organisert". Det bør noteres at dette predikatet behandles som et logisk uttrykk. Ved siden av alle disse uttrykkene inngår for hvert naturlig tall n>= 1 en muligens ikke-tom mengde av n-ære predikater. Disse er de eneste ikke-logiske uttrykkene i språket.

I §3 definerer vi de kalkylene vi har arbeidet med i Rognes [1], samt en rekke andre beslektede doxastiske predikatkalkyler helt eksplisitt. Vi angir hvilke setningslogiske, predikatlogiske og identitetsteoretiske aksiomer som inngår i teoriene samt hvilke aksiomer som vi tar vårt utgangspunkt i når det gjelder tros-operatoren T og rasjonalitetsprediaktet η. I tillegg til det spesifiserer vi de slutningsreglene som vi vil benytte. Kalkylen Kη, og den enda svakere kalkylen Kη-, som vi utviklet i Rognes [1], blir i dette avsnitt utvidet med visse nye aksiomer som gjelder identitet, nemlig formlene "x=y → T;z(x=y)" og "x≠y → T;z(x≠y)", samt en "doxastisk versjon" av den såkalte Barcan-formelen, nemlig

η(x) → (Ay)T;x(α) → T;x((Ay)α).

Den omvendte formel, η(x) → T;x((Ay)α) → (Ay)T;x(α), kan utledes i alle våre kalkyler. I §3 har vi også inkludert en figur som viser inklusjonsforholdene mellom alle de predikatlogikkene vi har definert.

I §4 spesifiserer vi den første av våre semantiske teorier. Vi definerer først hva som menes med en modellstruktur for et doxastisk språk basert på unormale verdener. Dernest defineres hva som menes med at en formel er sann i en mulig verden i en slik modell. Vi definerer ytterligere fire hovedklasser av modellstrukturer av denne typen, nemlig det vi kaller Kη+ (Kη, Kη-) -modellstrukturer for L. Ytterligere en klasse, nemlig klassen av Kη- -modellstrukturer basert på unormale verdener som oppfyller det strenge konjunksjonskravet, betraktes også. Tilslutt defineres presist hva som menes at en formel α er gyldig i en modellstruktur. I §5 gir vi så en intuitiv redegjørelse for de diverse komponentene i modellstrukturer basert på unormale verdener. Dette avsnittet har muligens et mer filosofisk preg. I §6 beviser vi så en rekke teoremer om gyldighet av elementær art. For eksempel viser vi at alle teoremer i kalkylen Kη+ er gyldige i enhver Kη+-modellstruktur for L. Resultatene kan naturligvis brukes til å vise at visse formler ikke er utledbare i kalkylene. I den etterfølgende paragraf, §7, beviser vi også noen teoremer, som har relevans når det gjelder den konkrete konstruksjon av modellstrukturer basert på unormale verdener.

I §8 definerer vi presist en ny type modellstrukturer nemlig det vi kaller for modellstrukturer basert på "finstrukturerte utsagn". På samme måte som i §4 definerer vi fire typer av slike strukturer som korresponderer til de fire klassene av modellstrukturer basert på unormale verdener som ble avgrenset i §4. Det dreier seg om klassene av Kη+ (Kη, Kη-) -modellstrukturer for L basert på finstrukturerte utsagn samt klassen av alle de Kη- -modellstrukturebne for L basert på finstrukturerte utsagn som oppfyller det strenge konjunksjonskravet. I §8.1 gir vi så en mer utførlig intuitiv redegjørelse for denne typen strukturer.

I §9 beviser vi en rekke teoremer som viser sammenhengen mellom modellstrukturer basert på unormale verdener og strukturene som er basert på finstrukturerte utsagn. Vi viser for

© 2008 Morten Harboe Rognes

eksempel at man til enhver Kη+-modellstruktur basert på unormale verdener, og som i tillegg oppfyller et bestemt krav (+) vi spesifiserer, kan konstruere en tilsvarende Kη+- modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn som har det samme domene og samme mengde av logisk mulige verdener og som verifiserer nøyaktig de samme formlene i L. Tilsvarende viser vi at man for enhver Kη+ -modellstruktur kan konstruere en tilsvarende modellstruktur basert på unormale verdener som verifiserer de samme formlene. Resultater av samme art kan vises for de andre klassene av modellstrukturer som vi har antydet ovenfor. Resultatene i dette avsnittet er blandt de mer sentrale i dette skrift.

I §10 innfører vi det vi kaller relasjonele strukturer for L. Det er den tredje typen av modellstrukturer. Vi sondrer her mellom to klasser av slike strukturer. På den ene siden har vi de relasjonelle strukturene der de diverse alternativrelasjonene ikke er pålagt noen krav. På den andre siden har vi de relasjonelle modellstrukturene der vi krever at alternativrelasjonene skal være seriell. [1] I §11 viser vi at man til enhver relasjonell struktur kan konstruere en Kη- -modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn som oppfyller det strenge konjunksjonskravet og som verifiserer de samme formlene og at det omvendte også holder. Vi viser også at det samme forhold gjelder i forbindelse med klassen av alle serielle relasjonelle strukturer på den ene side og klassen av alle Kη+-modellstrukturer basert på finstrukturerte utsagn på den annen side. I §12 sammenfatter vi de resulatene vi har kommet frem til vedrørende de modellklassene vi har definert.

Den siste delen av dette skrift, §13 - §19, beskjeftiger seg hovedsakelig med fullstendighetsbeviset, et Henkin-bevis, for kalkylene Kη+ og den svakere kalkylen Kη- [E1,E2,TBF]. I §13 fremsetter vi noen innledende betraktninger før vi §14 viser hvordan et språk for doxastisk logikk kan utvides med visse konstanter som vi kalle spesielle konstanter. Utvides et språk L for doxastisk logikk L til et språk med spesielle konstanter L;c vil det i L;c for enhver formel av typen (Ex)α finnes tellbart uendelig mange spesielle konstanter som svarer til denne formelen. I denne paragrafen definerer vi også en rekke begreper som er vesentlige i forbindelse med denne typen konstanter som hva som menes med et spesielt aksiom og en Henkin mengde. Vi definerer også hva som menes med at en formelmengde har E-egenskapen. I §15 definerer vi et annet begrep som er svært vesentlig i fullstendighetsbeviset, nemlig maksimalt konsistent formelmengde. Vi gir et bevis for Lindenbaums sats om at enhver konsistent formelmengde kan utvides til en maksimalt og beviser endel sats som angir viktige egenskaper ved slike maksimale mengder. I §16 beviser vi en rekke hjelpesetninger som benyttes i de etter følgende paragrafer.

Det neste avsnittet viser for det første hvordan man, gitt en formelmengde som er konsistent, kan utvide denne til en maksimalt konsistent mengde med E-egenskapen og som derfor er en Henkin-mengde. For det andre viser vi hvordan man for enhver maksimalt mengde som har E-egenskapen Δ og enhver formel av typen η(a) som er med i denne, kan konstruere en annen maksimalt konsistent mengde med E-egenskapen Γ. Γ sies i dette tilfelle å være underordnet Δ med hensyn på konstanten a. På dette vis kan man danne en trestruktur av underordnete mengder. På basis av denne trestrukturen konstruerer vi så i §18 en kanonisk modell med utgangspunkt i en konsistent mengde Δ og viser at alle formlene i Δ er sanne i den verdenen som representeres av Δ.

Det bør nevnes at vi i vårt fullstendighetsbevis står vi stor gjeld til det fullstendighetsbevis for modal predikatlogikk som gjennomføres i Hughes og Cresswell [1].

I §19 samler vi så sammen endel tråder. Egentlig har vi i skriftet formulert tre forskjellige gyldighetsbegreper knyttet til henholdsvis modellstrukturer basert på unormale verdener, modellstrukturer basert på finstrukturerte utsagn og relasjonelle modeller. I denne

[1] Er R en relasjon over domenet D sies den å være "seriell" om man har: (Ax)(xêD → (Ey)(yêD & xRy)).

© 2008 Morten Harboe Rognes

nest siste paragrafen viser vi derfor at Kη+ er fullstendig uansett hvilket av disse gyldighetsbegrepene man legger til grunn. Tilsvarende gjelder for systemet Kη-[E1,E2,TBF].

§2 Språket til kalkylen Kη+

Den type språk vi skal arbeide med i det følgende vil her bli omtalt som språk for doxastisk logikk. Et slikt språk er bestemt ved hjelp av de tegnene som inngår i det samt reglene for hvordan man konstruerer velformede formler på basis av disse tegnene.

Tegnene i et språk for doxastisk logikk er delt inn i de følgende disjunkte kategorier. For det første inngår parantestegnene "(" og ")" blandt tegnene i språket. Dessuten inneholder språk av denne typen en tellbart uendelig mengde med variabeltegn. Offisielt dreier det seg om uttrykkene i rekken "x", "x'", "x"", "x"'", ... osv. Vi nevner imidlertid at vi mer uoffisielt vil bruke "x", "y","z", "x;1", "x;2", "x;3" .... etc som syntaktiske variabler for variabeltegnene. Videre inneholder et språk for doxastisk logikk tegnet for negasjon, "¬", og tegnet for materiell implikasjon, "→", samt tegnet for allkvantoren "A". Videre inneholder det tegnet "T" som står for konstruksjonen "tror at". En formel av typen "T;x(α)" leses "x tror at α". I tillegg til de tegn som er nevnt inneholder et språk L for doxastisk logikk, for hvert naturlig tall n>= 1 en mengde med med n-ære predikatsymboler. For noen n, eventuelt for alle n, kan denne mengden være tom. Videre inneholder L to-plasspredikatet "=" for identitet og det spesielle enplasspredikatet "η". En formel av typen "η(x)", der x er et variabeltegn, leses "x er et individ hvis trosfelt er logisk sett rasjonelt organisert". Vi skal komme tilbake til forskjellige lesemåter av dette predikatsymbolet senere.

I tillegg til alle disse tegnene inneholder et språk L for doxastisk logikk en mengde med konstanter. Denne kan i prinsippet være tom, endelig, tellbart uendelig eller overtellbar.

De velformede formlene i et språk L for doxastisk logikk dannes etter de vanlig, forventede, regler som skulle være velkjent:

Definisjon 2.1 Klassen av velformede formler i et språk L for doxastisk logikk er den minste klassen av endelige tegnsekvenser som oppfyller de følgende krav: (i) Er P et n-ært predikat og a;i for i=1,...,n enten et variabel tegn eller en konstant er P(a;1,....,a;n) en velformet formel. (ii) Er a;i, for i=1,2, enten et variabeltegn eller en konstant er a;1 = a;2 en velformet formel. (iii) Er a enten et variabeltegn eller en konstant er η(a) en velformet formel. (iv) Er α og β velformede formler er (α→β) en velformet formel. (v) Er α en velformet formel er (¬α) en velformet formel. (vi) Er x et variabeltegn og α en velformet formel er (Ax)α en velformet formel. (vii) Er a enten et variabel tegn eller en konstant og er α en velformet formel er også T;a(α) en velformet formel.

Det er en rekke kommentarer som kan gjøres i forbindelse med språk av den typen vi nå har avgrenset.

Med de *logiske symbolene* i et språk L forstås her parantestegnene, variabeltegnene, de setningslogiske konnektivene, ¬ og →, allkvantoren, trosoperatoren T, identitetspredikatet og predikatet η. Alle andre tegn i språket regnes som ikke-logiske symboler. Dette innebærer at ethvert predikat som er forskjellig fra identitetspredikatet eller det monadiske predikatet η, samt enhver konstant, er å regne som et ikke-logisk symbol.

Det er naturligvis vår hensikt at de enkelte konnektivene i språket skal ha den betydning de vanligvis har. Dette innebærer at en formel av typen "¬α" leses "Det er ikke slik at α". En formel av typen "α→β" leses "Hvis α så β". En formel av arten "(Ax)α" leses "For alle objekter x er det slik at α". Formler av typen "T;x(α)" leses "x tror at α".

© 2008 Morten Harboe Rognes

Når det gjelder formler av typen "η(x)" leses disse "trosfeltet til x er logisk sett rasjonelt organisert". I denne forbindelse bemerker vi følgende - en mer utførlig redegjørelse vil bli gitt senere i dette arbeidet - at vi med trosfeltet til et individ x forstår mengden av alle de utsagn som beskriver forhold x tror at foreligger. Videre sier vi at en utsagnsmengde Δ er logisk sett rasjonelt organisert om den oppfyller de følgende fire krav:

For det første skal alle logisk nødvendig sanne utsagn være med i Δ. For det andre skal utsagnsmengden Δ være konsistent: Er x et utsagn som er med i Δ og y et annet utsagn som er logisk sett uforenelig med x så kan ikke y også være med i Δ. For det tredje skal Δ være lukket under logisk konsekvens. For det fjerde skal utsagnsmengden Δ oppfylle det følgende krav: Er Γ en vilkårlig delmengde, endelig eller uendelig, av utsagnene i Δ så skal konjunksjonen av alle utsagnene i Γ være et utsagn som er med i Δ.

At trosfeltet til x er logisk sett rasjonelt organisert innebærer altså ikke noe annet enn at mengden av alle de utsagn som beskriver alt det x tror er tilfelle oppfyller disse fire kravene.

Vi gjentar at vi bruker "x", "y", "z", etc. og også "x;1", "x;2", "x;3"... som syntaktiske variabler for variabeltegn. Vi bruker vanligvis "a","b", "c", eventuelt påført indekser og superindekser av forskjellig slag, som syntaktiske variabler for konstanter.

Anta L er et språk for doxastisk logikk og at D er en ikke-tom mengde. Da betegner L(D) det språket vi får når L utvides med et sett av nye konstanter, vi vil kalle dem navn, som er i en-entydig korrespondanse med elementene i D. Hvert navn i L(D) betegner nøyaktig et element i D og for hvert element a i D finnes det et og bare et navn i L(D) som betegner a. Vi betegner navngivningsfunksjonen med n. Er derfor a et element i D er n(a) navnet på elementet a i L(D). Er videre i et navn i L(D) er n;-1(i) det elementet i D som i er et navn på. Vi vil bruke "i", "j", eventuelt med indekser, som syntakstiske variabler for navn.

Det bør bemerkes at navnene i språket L(D) kommer i tillegg til de konstantene som allerede finnes i L.

I visse sammenhenger kan det være hensiktsmessig å kunne henvise til klassen av de lukkede formlene i et språk L med et kort uttrykk. Vi skal derfor tillate oss å bruke uttrykket "CFm(L)" for å betegne mengden av alle de lukkede formlene i L. Klassen av formler i L betegner vi med Fm(L). Videre er det også hensiktsmessig å ha for hånden et kort uttrykk for å betegne mengden av de n-ære predikatene i et språk L. I denne forbindelse vil vi bruke uttrykket "Pred;n(L)". "Pred;n(L)" betegner altså mengde av alle de n-ære predikatene i L.

Vi nevner tilslutt følgende: Som man ser ingår bare de setningslogiske konnektivene → og ¬ i språk for doxastisk logikk. De andre vanlige setningslogiske konnektivene innføres ved definisjoner, i det vi setter:

$$\alpha \vee \beta = (\neg\alpha) \rightarrow \beta$$
$$\alpha \,\&\, \beta = \neg(\alpha \rightarrow (\neg\beta))$$
$$\alpha \leftrightarrow \beta = (\alpha \rightarrow \beta) \,\&\, (\beta \rightarrow \alpha)$$

Heller ikke inngår eksistenskvantoren blandt de primitive tegnene i et språk L for doxastisk logikk. Også dette innføres per definisjon, nemlig ved:

$$(Ex)\alpha = \neg\,(Ax)(\neg\alpha)$$

© 2008 Morten Harboe Rognes

§3 Syntaktisk definisjon av kalkylen Kη+

Logikken, eller om man vil, kalkylen, Kη+, er en utvidelse av den vanlige predikatlogikken med identitet. La L være et språk for doxastisk logikk. Vi avgrenser først de *setningslogiske* aksiomene i L. Dette er alle instanser av de følgende tre skjemaer:

U1 $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
U2 $((\neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
U3 $(\alpha \rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)) \rightarrow ((\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow (\alpha\rightarrow\gamma))$

De *predikatlogiske* aksiomene i L er alle instanser av de følgende skjemaer:

Q1 $(Ax)\alpha \rightarrow \alpha;x[a]$ der a enten er en konstant eller et variabeltegn som er substitutibelt for x i α
Q2 $(Ax)(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow (Ax)\beta$ forutsatt at variabeltegnet x ikke forekommer fritt i α

De *identitetslogiske* aksiomene i L er alle instanser av de følgende skjemaer:

I1 $x = x$
I2 $x = y \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ forutsatt at β er nøyaktig som α bortsett fra eventuelt å ha en fri forekomster av y på et eller flere av de steder der α har en fri forekomst av x.

Dernest avgrenser vi de *doxastiske* aksiomene som er alle instanser av de følgende skjemaer:

A1 $\eta(x) \rightarrow (T;x(\alpha\&\beta) \leftrightarrow T;x(\alpha) \& T;x(\beta))$
A2 $\eta(x) \rightarrow \neg\ T;x(\alpha\& \neg\alpha)$
E1 $\eta(z) \rightarrow (x = y \rightarrow T;z(x=y))$
E2 $\eta(z) \rightarrow (\neg(x=y) \rightarrow T;z(\neg(x=y)))$
TBF $\eta(x) \rightarrow ((Ay)T;x(\alpha) \rightarrow T;x((Ay)\alpha))$

Aksiomskjemaene som inngår i kalkylen Kη+ er de setningslogiske skjemaene, de predikatlogiske og de identitetsteoretiske, samt alle de doxastiske, dvs. skjemaene A1, A2, E1, E2 og TBF.

Når det gjelder slutningsregler inneholder Kη+ de følgende:

MP $\vdash \alpha \ \& \ \vdash (\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow \vdash \beta$
UG $\vdash \alpha \rightarrow \vdash (Ax)\alpha$
R1 $\vdash \alpha \rightarrow \vdash \eta(x) \rightarrow T;x(\alpha)$
R2 $\vdash (\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow \vdash \eta(x) \rightarrow (T;x(\alpha) \rightarrow T;x(\beta))$

Dermed har vi angitt alle de slutningsreglene som inngår i Kη+. Som man ser dreier det seg om modus ponens (MP) og universell generalisering, samt de to reglene R1 og R2. Med et *Kη+-bevis* i L forstår vi en rekke av formler i L der den første formelen er et Kη+- aksiom i L, og der enhver formel som kommer etter den første, enten (a) er sluttet fra to foregående formler ved hjelp av modus ponens, eller (b) er sluttet fra én formel som kommer tidligere i rekken ved hjelp av universell generalisering, R1 eller R2. Vi sier at en formel α i L er bevisbar i Kη+,

© 2008 Morten Harboe Rognes

eller et Kη+-teorem i L, i symboler: Kη+ |- α, hvis og bare hvis det finnes et Kη+-bevis i L hvor α er den siste formelen.

Kalkylen Kη+ som vi har definert ovenfor avviker fra kalkylen Kη som ble beskrevet og undersøkt i Rognes [1]. Kη er den kalkylen man får når man fjerner aksiomskjemaene E1 og E2, samt det spesielle skjemaet TBF, "Barcan-formelen" for operatoren T fra Kη+. Kη er derfor en noe svakere kalkyle. Selvfølgelig er alle teoremene som kan utledes i Kη utledbare i Kη+. I Rognes [1] ble ytterligere en kalkyle betraktet, nemlig den man får fra Kη når man fjerner aksiomskjemaet A2. Denne ble betegnet med Kη-. I Rognes [1] betraktet vi også en rekke utvidelser av Kη, nemlig dem man får ved å legge til et eller flere av skjemaene B1 - B12, som ble nevnt i §6 i Rognes [1].[2] Man kan naturligvis betrakte de systemene man får nå Kη+ utvides med et eller flere av disse skjemaene. Vi har imidlertid ikke til hensikt å gi noen utførlig analyse av disse utvidelsene Kη+ i dette skrift. Når det gjelder den typen semantikk for språk for doxastisk logikk som vi skal gi en fremstilling av i de neste avsnitt er det imidlertid mulig å spesifisere ytterligere krav på de modellstrukturene som vi presenterer der som i en viss forstand "korresponderer" til aksiomene B1 - B12. Imidlertid har vi ikke konsentrert oss om å gi fullstendighetsbevis for disse utvidelsene. Det må konstateres at vi ved det nuværende tidspunkt ikke kan tilby noen slike bevis bortsett fra for noen få utvidelser. Dette skal vi komme tilbake til.

Det er imidlertid en slutningsregel som det kan være verdt å nevne i denne forbindelse. Vi har i tankene den følgende regel som her betegnes med R3, men som i Rognes [1] ble betegnet med E:

R3 $\quad \vdash \alpha \leftrightarrow \beta \quad \rightarrow \quad \vdash T;x(\alpha) \leftrightarrow T;x(\beta).$

Vi skal kalle systemet vi får når Kη+ utvides med denne regelen for KEη+. Regelen gir uttrykk for det forhold at de utsagnene som inngår i trosfeltet til et individ x er slik at to utsagn er identiske dersom de uttrykkes av to formler som er logisk ekvivalente. Igjen vil vi vente med en mer utførlig diskusjon av denne slutningsregelen til vi har presentert vår første semantiske teori for doxastisk-logiske språk av den typen vi arbeider med her.

§ 3.1 En oversikt over systemer som er av spesiell interesse i dette skrift

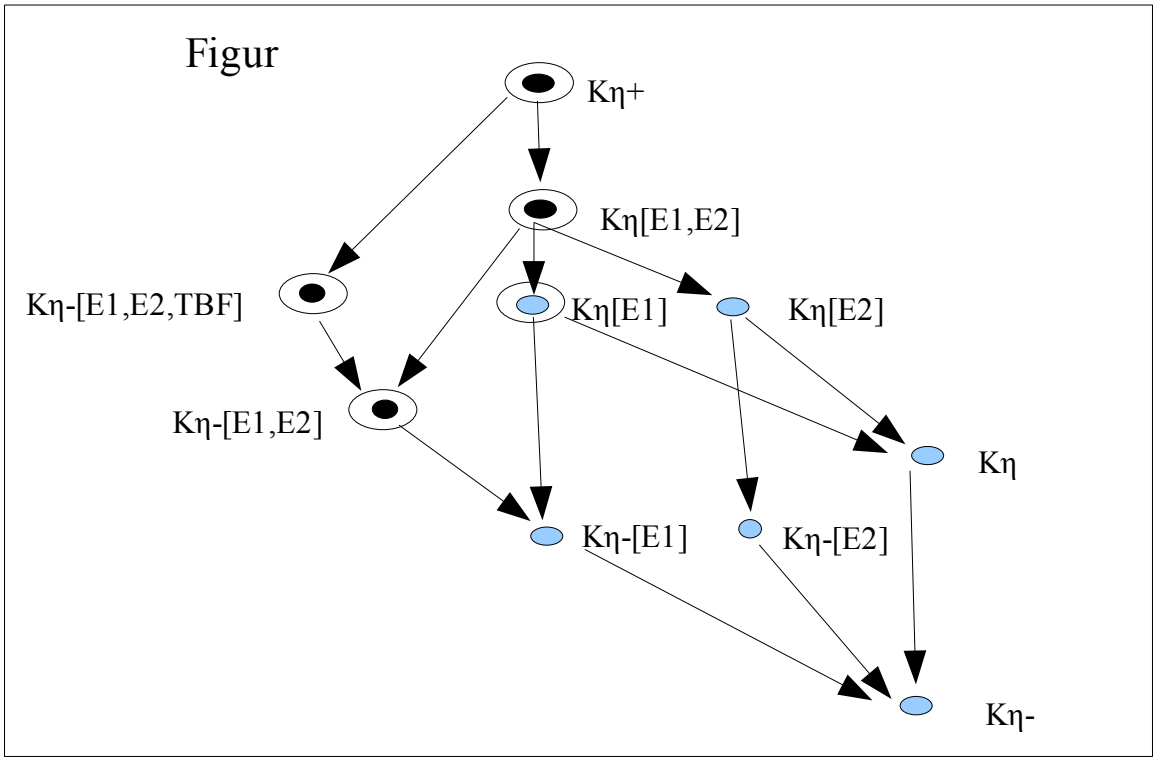
På figuren på neste side har vi gitt en oversikt over implikasjonsforholdene mellom de logiske kalkylene som er av størst betydning i dette skrift. Det bør bemerkes at dersom S er en kalkyle og A;1,...,A;n aksiomskjemaer, betegner S[A;1,... ,A;n] det systemet som vi får som resultat når systemet S utvides med skjemaene A;1, ...,A;n som nye aksiomskjemaer.

---

[2] De aksiomene det dreier seg om er de følgende:

B1	$\eta(x) \rightarrow T;x(\eta(x))$
B2	$T;x(\alpha) \rightarrow T;x(T;x(\alpha))$
B3	$T;x(T;x(\alpha)) \rightarrow T;x(\alpha)$
B4	$\eta(x) \rightarrow . T;x(\alpha) \rightarrow T;x(T;x(\alpha))$
B5	$\eta(x) \rightarrow . T;x(T;x(\alpha)) \rightarrow T;x(\alpha)$
B6	$\eta(x) \rightarrow T;x(T;x(\alpha) \rightarrow \alpha)$
B7	$\eta(x) \rightarrow . T;x(\alpha \rightarrow T;x(\alpha))$
B8	$\eta(x) \rightarrow T;x(\alpha \leftrightarrow T;x(\alpha))$
B9	$\eta(x) \rightarrow T;x(\alpha) \vee T;x(\sim\alpha)$
B10	$\eta(x) \rightarrow T;x(T;x(\alpha) \vee T;x(\sim\alpha))$
B11	$\eta(x) \rightarrow . \sim T;x(T;x(\alpha) \& \sim\alpha)$
B12	$\eta(x) \rightarrow . \sim T;x(\alpha \& \sim T;x(\alpha))$

© 2008 Morten Harboe Rognes



Figuren ovenfor gir nåen oversikt over de kalkylene som kanskje særlig vil være av betydning i dette skrift. Kalkylen Kη+ er som beskrevet ovenfor. Man får som nevnt kalkylen Kη ved å fjerne skjemaene E1, E2 og TBF fra Kη+. Enda svakere enn Kη er Kη- som fremkommer fra fra Kη ved å fjerne aksiomskjemaet A2. Kη-[E1] og Kη-[E2] er naturligvis utvidelser av Kη- med henholdsvis skemaene E1 og E2. Kη-[E1,E2] er det systemet som fremommer når Kη- utvides med begge disse skjemaene. På tilsvarende vis forholder det seg med Kη, Kη[E1], Kη[E2] og Kη[E1,E2]. En pil på figuren fra et system X til et annet Y innebærer at alle teoremene i det sistenevnte system er inkludert i det førstnevnte. Alle inklusjonene angitt ved pilene er trolig strenge, men det må man på en eller annen måte godtgjøre. Vi skal ikke forsøke å gi noe detaljert bevis for det her.

La oss gjøre oppmerksom på at de systemene som vi primært vil beskjeftige oss med i det følgende er Kη+, samt Kη- og Kη utvidet med aksiomene E1 og E2. Det er klart at Kη[E1,E2] utvidet med TBF er identisk med Kη+. Men Kη-[E1,E2] utvidet med TBF er en kalkyle som er genuint svakere enn Kη+.

§4 Semantisk teori for Kη+ basert på unormale verdener.

I de neste avsnitt benytter vi følgende notasjon: Anta a og b er to mengder. Da betegner vi klassen av alle de funksjoner som har a som sitt domene, og sitt verdiområde inkludert i b, med b^a. Mao. har vi at b^a = Mg(f: Func(f) & Dom(f)= a & Rgn(f) Inkl b). Vi gjør også oppmerksom på at Pt(a), der a er en mengde, betegner potensmengden til a.

Vi går nå over til å definere hva vi mener med en modellstruktur for et språk L, der L er et predikatlogisk språk av den typen som vi har definert tidligere, det vil si et predikatlogisk språk for doxastisk logikk

© 2008 Morten Harboe Rognes

Definisjon 4.1: Med *en modellstruktur M for L basert på unormale verdener* forstår vi et tuple M = <D,C,I,q,V>, der komponentene oppfyller de følgende krav:

(i) D, C og I er ikke-tomme mengder der C er inkludert i I.
(ii) q ê Pt(D)^I. Dette vil si at q er en funksjon som til hver mulig verden tilordner denne en delmengde av D. Det er meningen at mengden q(w) der wêI skal representere de individene i verdenen w hvor trosfeltet er logisk sett rasjonelt organisert.
(iii) V er en funksjon som tilordner alle predikater i L, samt alle konnektiver og operatorer i L visse funksjoner. V(P) er definert ved tilfelle på følgende måte:

(a) Er P et n-ært predikat i L så er V(P)ê (Pt(D^n))^I
(b) Er P konnektivet ¬ så er V(P) ê Pt(I)^Pt(I)
(c) Er P konnektivet → så er V(P) ê Pt(I) ^(Pt(I)xPt(I))
(d) Er P konnektivet A så er V(P) ê Pt(I)^(Pt(I)^D)
(e) Er P operatoren T så er V(T)ê Pt(I)^(DxPt(I))
(f) Er P en konstant i L krever vi at V(P)êD

Man ser altså at V er en funksjon hvis domene er mengden som består av alle predikatene i L samt de tre konnektivene ¬, → og A.
(iv) Vi krever av V at den skal oppfylle de følgende krav:

(1) Anta Xê Pt(I)^D. Da må V(A) være slik at
(Aw)(wêC → (wêV(A)(X) ↔ (Aa)(aêD → wêX(a))))
(2) Anta XêPt(I). Da må V(¬) være slik at
(Aw)(wêC → (wêV(¬)(X) ↔ ¬(wêX)))
(3) Anta X,YêPt(I). Da må V(→) være slik at
(Aw)(wêC → (wêV(→)(X,Y) ↔ (wêX → wêY)))
(4) Anta wêC Da krever vi at <x,y>êV(=)(w) ↔ x=y for alle x,yêD
(5) Anta wêC. Da krever vi at V(η)(w) = q(w)

Dette avslutter definisjonen.

I en modellstruktur M= <D,C,I,q,V> for L er det meningen at I representerer alle mulige verdener. D representerer mengden av alle mulige individer. Delmengden C representerer de verdnene hvor de vanlige setningslogiske og predikatlogiske konnektivene tolkes på klassisk vis. Man kunne derfor kalle C for de normale verdnene og de elementene i I som ikke er med i C for de unomale eller ikke-klassiske verdenene. De enkelte delmengder av I representerer de finstrukturerte utsagnene i modellstrukturen. Delmengdene av C representerer det vi i forskjellige andre sammenhenger har kalt for presise deskriptive utsagn. Er X en delmengde av I kaller vi IΩC for den deskriptive kjernen i X. To utsagn X og Y med den samme deskriptive kjerne vil være sanne i nøyaktig de samme klassiske verdener og er derfor logisk ekvivalente.

For å fullføre beskrivelsen av den modellteorien vi har i tankene for L, må vi gjøre to ting. Anta M=<D,C,I,q;V> er en modellstruktur for L. For det første må vi nå definere hva som menes med at en formel α i CFm(L(D)) er sann i en verden w i en modellstruktur M Dessuten må vi avgrense de modellklasser som vi tenker oss at svarer til henholdsvis systemene, Kη+, Kη og systemet Kη-. Det første gjøres ved den følgende definisjon:

Definisjon 4.2 : Anta M=<D,C,I,q,t,V> er en modellstruktur for L. Da defineres hva som menes med at *en formel γ i CFm(L(D)) er sann i en verden w i en modellstruktur M* , i symboler (M,w) ⊨ γ, induktivt ved de følgende klausuler:

(i) Er P et n-ært predikat i L og a;i, for i=1,..,n, enten et navn eller en konstant, setter vi:

© 2008 Morten Harboe Rognes

(M,w) ⊨ P(a;1,...,a;n) ↔ <v(a;1),...,v(a;n)> ê V(P)(w) der v(a;i), i= 1,...,n, er V(a;i) on a;i er en konstant i L og v(a;i) = n;-1(a;i) om a;i er et navn i L

(ii) Er P predikatet η i L og er a enten et en konstant i L eller et navn i L(D) setter vi:
(M,w) ⊨ η(a) ↔ v(a)ê q(w) hvor v(a) = V(a) om a er en konstant i L og v(a)=n;-1(a) om a er et navn i L(D).

(iii) Er P identitetspredikatet i L og x,y to variabeltegn i L setter vi:
(M,w) ⊨ a;1=a;2 ↔ <v(a;1),v(a;2)>êV(=)(w) der v(a;i) er V(a;i) om a er en konstant i L og v(a;i) er n;-1(a;i) om a;i er et navn i L(D)

(iv) Er γ = (α→β) setter vi:
(M,w) ⊨ γ ↔ wêV(→)(Mg(w': (M,w') ⊨ α) , Mg(w': (M,w') ⊨ β))

(v) Er γ = ¬α setter vi
(M,w) ⊨ γ ↔ wêV(¬)(Mg(w': (M,w') ⊨ α))

(vi) Er γ = (Ax)α for et eller annet variabeltegn x setter vi
(M,w) ⊨ γ ↔ wêV(A)(Mg(<a,Mg(w':(M,w') ⊨ α;x[n(a)])>: aêD))

(vii) Er γ = T;a(α) for et eller annet navn eller konstant a, setter vi:
(M,w) ⊨ γ ↔ wêV(T)(v(a), Mg(w': (M,w') ⊨ α)) der v(a)=V(a) om a er en konstant i L og v(a) = n;-1(a) om a er et navn i L(D)

Dette avslutter definisjonen.

Som man ser vil enhver lukket formel i L(D) være sann eller usann i enhver verden. Men i de ikke-klassiske verdener kan man ha at merkverdige ting er tilfelle. Her kan i og for seg en formel og negasjonen av formelen være sanne samtidig.

Er M=<D,C,I,q,V> en modellstruktur for L, kaller vi mengden D for domenet i modellen. C kalles for de klassiske verdenene i modellstrukturen, I for de unormale verdenene. V kalles for valusajonsfunksjonen i modellstrukturen. Endelig omtaler vi q(w), der w er med i I ,som mengden av de individene i modellstrukturen som har et trosfelt som er logisk sett rasjonelt organisert i verdenen w.

Blandt modellstrukturene for L vil vi avgrense tre delmengder Kη- modellstrukturene for L og (Kη-) -modellstrukturene for L og Kη+ -modellstrukturene for L.

Definisjon 4.3: Anta M = <D,C,I,q,V> er en modellstruktur for L. Da kalles M for en *Kη-modellstruktur for L* dersom den oppfyller følgende krav for alle wêC og alle aêq(w):

(i) Mg(y: yêPt(I) & C Inkl y) Inkl Mg(x: wêV(T)(a,x))
(ii) X,YêPt(I) & X,Yê Mg(x: wêV(T)(a,x))& ZêPt(I) & ZΩC = XΩYΩC. → Zê Mg(x: wêV(T)(a,x))
(iii) Xê Mg(x: wêV(T)(a,x))& YêPt(I) & XΩC Inkl YΩC → Yê Mg(x: wêV(T)(a,x))
(iv) Xê Mg(x: wêV(T)(a,x))& Yê Pt(I) & YΩC = C -(XΩC) → ¬ (Yê Mg(x: wêV(T)(a,x)))

Dernest definerer vi Kη- modellstruktur for L slik:

Definisjon 4.4: Anta M = <D,C,I,q,V> er en modellstruktur for L. Da kalles M for en *Kη--modelstruktur for L* dersom den oppfyller følgende krav for alle wêC og alle aêq(w):

(i) Mg(y: yêPt(I) & C Inkl y) Inkl Mg(x: wêV(T)(a,x))

© 2008 Morten Harboe Rognes

(ii) X,YêPt(I) & X,Yê Mg(x: wêV(T)(a,x))& ZêPt(I) & ZΩC = XΩYΩC. →
Zê Mg(x: wêV(T)(a,x))
(iii) Xê Mg(x: wêV(T)(a,x))& YêPt(I) & XΩC Inkl YΩC → Yê Mg(x: wêV(T)(a,x))

Endelig defineres hva som menes med en Kη+-modell for L slik:

Definisjon 4.5: Anta M = <D,C,I,q,t,V> er en modellstruktur for L. Da kalles M for en *Kη+-modelstruktur for L* dersom den oppfyller følgende krav for alle wêC og alle aêq(w):

(i) Mg(y: yêPt(I) & C Inkl y) Inkl Mg(x: wêV(T)(a,x))
(ii) Sett T;(a,w) = Mg(x: wêV(T)(a,x)). Anta Δ<>ø, Δ Inkl Pt(I) og at Δ Inkl T;(a,w). Anta videre at yêPt(I) og at yΩC = SN(Mg(xΩC: xêΔ)). Da er yêT;(a,w)
(iii) Xê Mg(x: wêV(T)(a,x))& YêPt(I) & XΩC Inkl YΩC → Yê Mg(x: wêV(T)(a,x))
(iv) Xê Mg(x: wêV(T)(a,x))& Yê Pt(I) & YΩC = C -(XΩC) →
¬ (Yê Mg(x: wêV(T)(a,x))

Når det gjelder disse tre klassene av modellstrukturer bør man bemerke følgende: Betrakter man for eksempel klassen av (Kη-)-modellstrukturer ser man ganske raskt - vil vi senere gi et detaljert bevis - at aksiomskjemaene E1 og E2 er gyldige i alle slike strukturer. Dette kommer av de valusajonsreglene som er fastsatt i Definisjon 4.1 og 4.2 for identitet. Det er derfor misvisende å si at for eksempel mengden av (Kη-)-modellstrukturer korresponderer til kalkylen Kη-. Den korresponderer heller til kalylen Kη-[E1,E2]. Det samme gjelder mengden av alle Kη-modellstrukturer. Det systemet i figuren som svarer til denne er systemet Kη-[E1,E2]. Når det derimot gjelder Kη+ er den korresponderende mengden av modellstrukturer mengden av alle Kη+- modellstrukturer.

Man ser selvfølgelig fra disse definisjonene at klassen av modellstrukturer som svarer til Kη- er mer omfattende enn den som svarer til Kη, fordi man av en modellstruktur i den første klassen ikke krever at konsistenskravet (iv) skal være oppfylt. Man ser også at klassen av Kη+-modellstrukturer for L er er mindre omfattende en klassen av Kη-modellstrukturer for L fordi kravet (ii) i Definisjon 4.5 er langt sterkere enn kravet (ii) i Definisjon 4.1.

Det er imidlertid ytterligere en klasse av modellstrukturer basert på unormale verdener som vi vil betrakte. Dette er klassen av alle (Kη-)-modellstrukturer som oppfyller det strenge konjunksjonskravet. Den kalkylen som korresponderer til denne klassen av modellstrukturer er kalkylen Kη- utvidet med skjemaene E1,E2 og TBF. Vi kaller denne mengden av modellstrukturer for mengden av alle Kη-* modellstrukturer.

Før vi definerer gyldighet i en modellstruktur er det beleilig å innføre noen hjelpebegreper. Anta M=<D,C,I,q,V> er en modellstruktur for L og anta α er en vilkårlig formel i L og at x;1,...,x;n er de variabeltegnene som forekommer fri i α. Vi sier da at formelen α' er en M-instans av α om α' = α;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n] der i;1,...,i;n er navn i L(D).

Vi sier tilslutt at en formel α i L er gyldig i en modellstruktur M for L hvis og bare hvis enhver M-instans α' av formelen α er sann i enhver verden i modellstrukturen M.

En formel α i L sies å være gyldig i svak forstand om den er gyldig i alle modellstrukturer. En formel sies å være Kη-gyldig om den er gyldig i enhver enhver Kη-

© 2008 Morten Harboe Rognes

modellstruktur for L, den sies å være Kη- -gyldig om den er gyldig i enhver Kη- -modellstruktur for L. Endelig er en formel Kη+-gyldig om den er gyldig i enhver Kη+ -modellstruktur for L

Dermed har vi faktisk beskrevet den modellteorien vi har hatt i tankene under arbeidet med kalkylene vi omtalte i forrige paragraf.

§5 Kommentarer til den semantiske teorien beskrevet i forrige paragraf.

Dersom M= <D,C,I,q,V> er en modellstruktur for L av den typen som er definert i §4 er det meningen at D representerer domenet i strukturen. Denne mengden representerer derfor absolutt alle de objektene det kvantifiseres over, dvs. området for kvantorene i L. De to neste komponentene i strukturen er C og I. Som man ser kreves det at C er inkludert i I. Når det gjelder disse to komponentene er det vår hensikt at I representerer mengden av alle verdener. C skal representere de verdenene som er logisk mulige, de normale verdenene. I - C vil derfor være de verdenene som ikke er normale.

Hvis to setninger α og β er sanne i nøyaktig de samme logiske mulige verdnene vil bikondisjonalen men henholdvis α som venstre og β som høyre komponent være en nødvendig sann setning. Man kan da si at de har det samme meningsinnhold, at de utrykker det samme utsagn. Mengden av alle de logisk mulige verdenene hvor α er sann ville det i så fall være naturlig å si at representerte det utsagnet som α uttrykker. Hvis man har et slikt utsagnsbegrep i tankene vi to logisk ekvivalente formler, f. eks. α og ¬(¬α) utrykke det samme utsagn. Oppfatter man derfor tro som en relasjon mellom et individ x og et utsagn i denne forstand ,vil en person x som tror α nødvendigvis også tro at ¬(¬(α)), eller for å ta et mer komplisert eksempel, x vil måtte tro α &(((α→β) & ¬¬¬(β)) → ¬α)). Dette virker ikke spesielt rimelig spesielt siden det under disse omstendigheter også vil være en nødvendig sannhet at dersom x tror α så er det også slik at x tror α &(((α→β) & ¬¬¬(β)) → ¬α)).

Under alle omstendigheter er dette ikke noe som er utledbart i noen av de kalkylene vi har formulert i §3. Hvis man derfor ønsker en semantisk teori som passer til dem kan man ikke oppfatte tro som en relasjon mellom et individ x og et utsagn i den betydning som innebærer at enhver mengde av normale verdener representerer et utsagn. Det er av denne grunn at man i den type modellstrukturer som vi har spesifisert ovenfor har innført ikke-normale verdener. La oss for eksempel anta at det finnes to verdener w1 og w2 der man i w1 har at α er sann, mens α &(((α→β) & ¬¬¬(β)) → ¬α)) er usann, mens det er omvendt i w2. Anta at vi nå med et finstrukturert utsagn mener en hvilken som helst delmengde av I. La oss videre anta at alle lukkede setninger i L(D) har en sannhetsverdi i enhver verden i I. La vi da u;1 betegne mengden av alle de verdenene i I hvor α er sann og u;2 mengden av alle de verdenene hvor α &(((α→β) & ¬¬¬(β)) → ¬α)) er sann ser man at u1 og u2 representerer forskjellige finstrukturerte utsagn. Hvis man derfor, slik som i semantikken ovenfor, oppfatter tro som en relasjon mellom et individ og et finstrukturert utsagn, kan man ikke lenger fra det for at x tror at α slutte at x tror at α &(((α→β) & ¬¬¬(β)) → ¬α)).

I forbindelse med en modellstruktur M=<D,C,I,q,V> av den typen vi har definert ovenfor skal vi kalle mengden av alle delmengder av C for utsagnene i modellstrukturen. Mengden av alle delmengder av I skal vi kalle mengden av finstrukturerte utsagn i modellstrukturen. Siden C Inkl I har vi Pt(C) Inkl Pt(I). Alle utsagn er derfor finstrukturerte utsagn. C SInkl I vil det også finnes finstrukturerte utsagn som ikke er utsagn. Er x et finstrukturert utsagn kaller vi xΩC êPt(C) den "klassiske kjernen", eller den normale delen av utsagnet x. xΩC, den klassiske delen av et finstrukturert utsagn x vil naturligvis, som man ser, være et utsagn

© 2008 Morten Harboe Rognes

Når det gjelder utsagn er det endel begrepsdannelser det er nærliggende å nevne. Mengden C er i seg selv et utsagn. Det vil naturligvis være sant i alle normale verdener. Et finstrukturert utsagn x sies derfor å være et nødvendig sant utsagn om C Inkl x. Man ser derfor at det vil finnes et mangfold av finstrukturerte utsagn som er nødvendig sanne. Hvor mange vil være avhengig av størrelsen til mengden C.

Den tomme mengden representerer et utsagn som er usant i enhver normal verden. Alle finstrukturerte utsagn x der x Inkl (I -C) vil derfor være utsagn som er nødvendig usanne.

Vi sier at et utsagn x impliserer et annet utsagn y, det forutsettes at x,yêPt(C), hvis og bare hvis x Inkl y, det vil si hvis alle de verdenene der x er sant er blandt alle de verdenene der utsagnet y er sant. Tilsvarende vil et finstrukturert utsagn x implisere et annet finstrukturert utsagn y hvis og bare hvis xΩC Inkl xΩy, med andre ord hvis og bare hvis den klassiske kjernen til x impliserer den klassiske kjernen til y. En utsagnsmengde kalles konsistent om det finnes en normal verden der alle utsagnene er sanne. Tilsvarende kalles en mengde med finstrukturerte utsagn Γ for konsistent hvis det finnes en normal verden wêC der alle de finstrukturerte utsagnene i Γ er sanne.

Anta Γ er en mengde med finstrukturerte utsagn. Da skal vi kalle Γ for *logisk sett rasjonelt organisert* dersom den inneholder alle finstrukturerte utsagn som er nødvendig sanne, den er lukket under implikasjon, dvs. logisk konsekvens, den er konsistent og den er lukket under konjunksjon.

La oss forklare litt nærmere hva det vil si at en mengde med finstrukturerte utsagn er lukket under konjunksjon. To finstrukturerte utsagn kalles naturligvis logisk ekvivalente om deres klassiske kjerner er identiske, med andre ord hvis og bare hvis xΩC = yΩC. Vi sier videre at et finstrukturert utsagn z er en konjunksjon av av to andre finstrukturerte utsagn x og y hvis og bare hvis den klassiske kjernen til z er identisk med snittet av de klassiske kjernene til x og y. Er x og y to finstrukturerte utsagn ser man at det ikke nødvendigvis finnes bare ett finstrukturert utsagn som er konjunksjonen av x og y. Det kan finnes mange slike finstrukturerte utsagn. Tilsvarende sier vi at det finstrukturerte utsagn x er en negasjon av det finstrukturerte utsagn y hvis og bare hvis den klassiske kjernen til x er sant i de, og bare de normale verdenene hvor den klassiske kjernen til y er usant. Mer formelt har man at det finstrukturerte utsagnet x er en negasjon av det finstrukturerte utsagnet y hvis og bare hvis man har at xΩC = C - (yΩC). At en mengde med finstrukturerte utsagn Γ er lukket under konjunksjon innebærer derfor ikke noe annet enn at dersom x,yêΓ, og z er et finstrukturert utsagn som er en konjunksjon av x og y, så er også z med i Γ.

Anta at Δ er en mengde med finstrukturerte utsagn. Har man da at z er et finstrukturert utsagn der den klassiske kjernen er identisk med snittet av alle de klassiske kjernene til elementene i Δ sier vi at z er en konjunksjon av elementene i Δ. Dette konjunksjonsbegrep er mer generelt enn det som ble innført ovenfor, siden det ikke er lagt noen begrensninger på størrelsen til Δ. Denne mengden behøver på ingen måte å være endelig. Den kan godt være tellbart uendelig eller overtellbart uendelig.

I en modellstruktur M = <D,C,I,q,V> er V en verditilordningsfunksjon som tilordner de ulike uttrykkene i L, som predikater og konnektiver, visse funksjoner. La oss i første omgang se litt nærmere på hva det er funksjonen V tilordner tros-operatoren T. Fra Definisjon 4.1 ser man at V(T) ê Pt(I) ^(DxPt(I)). Dette innebærer, om vi bruker den terminologien vi har innført ovenfor, at V(T) er en funksjon som til ethvert par <x,y> der x er et individ og y er et finstrukturert utsagn, tilordner dette paret et finstrukturert utsagn. Dette utsagnet, V(T)(x,y) representerer da det finstrukturerte utsagn at y beskriver etforhold individet x tror foreligger. Dersom wêV(T)(x,y) innebærer dette at y er et finstrukturert utsagn som x tror i verdenen w.

© 2008 Morten Harboe Rognes

Vi skal kalle Mg(y: yêPt(I) & wêV(T)(x,y)) for trosfeltet til x i verdenen w. Det er, som man ser, mengden av alle de finstrukturerte utsagn som x tror i verdenen w.

La oss kommentere komponenten q i en modellstruktur M. Vi vil forsøke å gjøre rede for den intuitive betydning til denne komponenten. Som man ser fra Definisjon 4.1 er q ê Pt(D)^I. Dette innebærer at q er en funksjon som tilordner enhver verden, ikke bare de normale, en mengde objekter i D. Er wêI er det meningen at mengden q(w) skal representere mengden av alle de individer x i verdenen w hvor trosfeltet er en logisk sett rasjonelt organisert mengde av finstrukturerte utsagn. Av denne har vi da også i krevd at dersom xêq(w) og wêC så skal trosfeltet til x i verdenen w utgjøre en mengde med finstrukturerte utsagn som logisk sett er rasjonelt organisert.[3]

En svært viktig komponent i en modellstruktur M = <D,C,I,q,V> basert på finstrukturerte utsagn er naturligvis funksjonen V. Denne tilordner de forskjellige konnektivene og operatorene i L forskjellige funksjoner. Vi har allerede sett at V(T) skal være en funksjon i mengden Pt(I)^(DxPt(I). La oss nå se litt nærmere på hva V tilordner de andre uttrykkene i L.

Anta først at P er et n-ært predikat. Fra Definisjon 4.1 ser man da at V(P)êPt(D^n)^I. Dette innebærer at V tilordner ethvert predikat en funksjon som til enhver verden tilordner en mengde med mulige individer. Man har derfor at V(P)(w), der wêI, er en mengde en n-ær relasjon over D. Denne mengden representerer ekstensjonen til P i verdenen w. Når det gjelder konstanter i L tilordner V dem elementer i D. Er derfor e en konstant i L kan man oppfatte V(e) som en konstantfunksjon som tilordner e det samme inidividet i D i enhver verden.

Det er imidlertid to predikater som står i en spesiell stilling i L. For det første har vi predikatet η. Vi krever V(η)(w)= q(w) for alle verdener wêC, siden q(w) representerer mengden av alle de individer i verdenen w hvor trosfeltet er rasjonelt organisert i den betydning vi gjorde rede for ovenfor.

For det andre har vi identitetspredikatet. Vi har naturligvis at V(=)ê (D^2)^I. Med andre ord er ekstensjonen til "=" i enhver verden en relasjon. Men i alle normale verdener i C kreves det at denne relasjonen er den samme og at den er identisk med identitetsrelasjonen over D. Vi har derfor i Definisjon 4.1 fastsatt at dersom wêC har man at

(1) (Ax)(Ay)(x,yêD → (<x,y>êV(=) ↔ x=y))

Dette innebærer altså at V(=) = Rest(I, D) for alle "klassiske" verdener w. For unormale verdener w er det ikke lagt noen restriksjoner på V(=). Det kan da være en hvilken som helst relasjon med de mest eiendommelige og sære egenskaper. Man ser også at det er i kraft av (1) at vi har at dersom x=y så må utsagnet at x=y være nødvendig sant. Videre har vi i lys av (1) at dersom en setning av formen e=c er sann i en eller annen verden, der e og c er konstanter, må den være sann i alle normale verdener. Det samme gjelder enhver formel av typen e≠c. Er e≠c sann i en verden må den også være sann i alle normale verdener. Det er av denne grunn at

[3]Som nevtn definerte vi ovenfor uttrykket "Γ er en mengde med finstrukturerte utsagn som logisk sett er rasjonelt organisert". I denne forbindelse nevnte vi fire krav: (i) Alle finstrukturerte utsagn som er logisk sanne er med i Γ. (ii) Γ er konjunktivt lukket. (iii) Γ er lukket under logisk konsekvens. (iv) Er xêΓ og er y et finstrukturert utsagn som er en negasjon av x så er ikke y med i Γ. Uttrykket "logisk sett rasjonelt organisert utsagnsmengde" er naturligvis noe uklart og uten noen helt bestemt mening. Men definerer man det ved hjelp av kravene (i) - (iv) virker definisjonen i det minste ikke helt vilkårlig. En modellstruktur der trosfeltet til enhver x i verdenen w der xêq(w) som oppfyller kravene (i) - (iv) er naturligvis en Kη-modellstruktur. Sløyfer man kravet (iv) får man en Kη- -modellstruktur. Tar man med alle fire kravene og forsterker det andre kravet til strengt konjunktivt lukket får man en Kη+-modellstruktur. Fjerner man det fjerde kravet og forsterker det andre slik at man krever at Γ skal være strengt konjunktivt lukket får man en type modellstrukturer som vi strengt tatt ikke har gitt noe navn ovenfor. Man kunne kanskje kalle dem Kη-+-modellstrukturer.

© 2008 Morten Harboe Rognes

aksiomskjemaene E1 og E2 kommer ut som sanne i enhver normal verden i en hvilken som helst modellstruktur basert på unormale verdener.

La oss gå videre og se på hva V tilordner de setningslogiske konnektivene og allkvantoren. Fra Definisjon 4.1 ser man at V(¬) ê Pt(I)^Pt(I). V(¬) er altså en funksjon som tilordner ethver finstrukturert utsagn et annet finstrukturert utsagn. Hvis derfor α er en lukket formel som uttrykker det finstrukturerte utsagnet u(α) virker det rimeligå kreve at V(¬)(u(α)) skal representere en negasjon av u(α) ,og at V(¬)(u(α)) derfor, i det minste i alle normale verdener w, er sant i verdenen w hvis og bare hvis u(α) er usant i verdenen w. Dette er bakgrunnen for det kravet vi stilte til V(¬) i en modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn, nemlig:

wêC → (wêV(¬)(X) ↔ ¬(wêX))

forutsatt at XêPt(I).

På tilsvarende vis forholder det seg med V(→). Igjen ser man fra Definisjon 4.1 at V(→)ê Pt(I) ^(Pt(I)xPt(I)). Gitt et par av finstrukturerte utsagn <x,y> tilordner altså V(→) dette paret et finstrukturert utsagn V(→)(x,y). Er da w en normal verden, ie. wêC, virker det ytterst rimelig å kreve at V(→)(x,y) er sann i denne verdenen w hvis og bare hvis det ikke er slik at utsagnet x er sant i verdenen w samtidig med at utsagnet y er usant i w. Med andre ord er kravet

(Aw)(wêC → wêV(→)(x,y) ↔ (wêx → wêy)) der x,yêPt(I)

ytterst rimelig.

La oss tilslutt føye til noen kommentarer om V(A). Man ser fra Defins ijon 4.1 at V(A)ê(Pt(I)^((Pt(I))^D)). Med andre ord har man at dersom XêPt(I)^D så er V(A)(X)êPt(I). V(A)(X) vil i så fall være et finstrukturert utsagn. Det kan være av interesse å studere dette litt nærmere.

Anta α er en formel i L(D) der x er den eneste variabelen som forekommer fri. Da kan vi med α assosiere en funksjon f;α som er med i Pt(I)^D på følgende måte: Anta a er et vilkårlig objekt i D. Da er n(a) navnet på a i L(D). Da vil alle de verdenene der α;x[n(a)] er sann representere et finstrukturert utsagn. La oss kalle det h;α. Vi setter f;α(a) = h;α. Man ser da selvfølgelig at f;α ê(Pt(I))^D.

Hvis F;α er som beskrevet ovenfor virker detnærliggende å kreve at V(A)(f;α) er et finstrukturert utsagn som svarer til, eller uttrykkes av, formelen (Ax)α. Er da w en normal verden virker det rimelig å kreve at wêV(A)(f;α) hvis og bare hvis (Ax)α er sann i w. Dette burde i sin tur holde hvis og bare hvis man har (Aa)(aêD → wêf;α(a)). Det er slike overveielser som er bakgrunnen for kravet:

wêC → (wêV(A)(X) ↔ (Aa)(aêD → wêX(a))) der Xê(Pt(I))^D.

Som man ser er dette et krav som stilles til V(A) i Definisjon 4.1.

Dermed har vi betraktet hovedtrekkene i den modellteorien basert på unormale verdener som vi har fremlagt i forrige paragraf.

§6 Gyldighetsteoremer. Bevis for at alle teoremene i Kη+ er gyldige.

Er S et av de systemene vi har betraktet og α en formel i L, der L er et språk for doxastisk logikk, bruker vi uttrykket "S |- α" som forkortelse for "α er bevisbar i systemet (kalkylen) S". Er M en modellstruktur for L, og α en formel i L, bruker vi uttrykket "M ⊨α" som forkortelse for "α er gyldig i modellstrukturen M". Vi bruker "Val(α)" som forkortelse for "α er gyldig i alle modellstrukturer". Videre bruker vi uttrykkene "Val_Kη(α)", "Val_Kη-(α)" og "Val_Kη+(a)" som forkortelse for henholdsvis "α er gyldig i alle Kη-modellstrukturer", "α er gyldig i alle (Kη-)-modellstrukturer" og "α er gyldig i alle Kη+ -modellstrukturer".

© 2008 Morten Harboe Rognes

Hovedformålet med denne paragrafen er å vise at alle formler som er bevisbare i Kη+ er gyldige i alle Kη+ -modellstrukturer. Mer presist skal vi etterhvert gi bevis for det følgende, egentlig ganske trivielle, teorem:

Teorem 6.1 Anta L er et språk for doxastisk logikk og at α er en formel i L. Da gjelder:
(i) Kη |- α → Val_Kη(α)
(ii) Kη- |- α → Val_Kη-(α)
(iii) Kη+ |- α → Val_Kη+(α)

Vi skal ikke umiddelbart levere noe enhetlig bevis for denne satsen. Det synes mer hensiktsmessig å bevise endel hjelpesetninger først.

Den første hjelpesetningen er denne:

Lemma 6.1 Anta L er et språk for doxastisk logikk. Anta M=<D,C,I,q,V> er en modellstruktur for L og at α,βêCFm(L).[4] Anta videre at wêC. Da gjelder følgende:
(i) (M,w) ⊨ ¬α ↔ ¬((M,w) ⊨ α)
(ii) (M,w) ⊨ (α→β) ↔ ((M,w) ⊨α → (M,w) ⊨ β)
(iii) (M,w) ⊨ (α vβ) ↔ ((M,w) ⊨ α v (M,w) ⊨β)
(iv) (M,w) ⊨ (α &β) ↔ ((M,w) ⊨ α & (M,w) ⊨β)
(v) (M,w) ⊨ (α ↔β) ↔ ((M,w) ⊨ α ↔ (M,w) ⊨β)
(vi) (M,w) ⊨ (Ax)α ↔ (Aa)(aêD → (M,w) ⊨ α;x[n(a)])
(vii) Er i;1,i;2 navn i L(D) og wêC gjelder
(M,w) ⊨ i;1 = i;2 ↔ <n;-1(i;1), n;-1(i;2)> êV(=)(w) ↔ n;-1(i;1) =n;-1(i;2)
(viii) Er i et navn i L(D) gjelder:
(M,w) ⊨ η(i) ↔ n;-1(i)êq(w)

Innholdet i satsen ovenfor er naturligvis elementært, men beviser man dette først er det lettere å gi et oversiktlig bevis for gyldighetsteoremet ovenfor, Teorem 6.1, på en oversiktlig måte.

Bevis for Lemma 6.1: *Ad (i)*: Anta (M,w) ⊨ ¬α og at wêC. Da har vi ved hjelp av Definisjon 4.2, punkt (v), at dette holder hvis og bare hvis (2) wêV(¬)(Mg(w': (M,w') ⊨ α)). Sett per definisjon: (2.1) X = Mg(w': (M,w') ⊨ α). Da er (2) ekvivalent med (3) wêV(¬)(X). Siden wêC har vi ved hjelp av Definisjon 4.1, punkt (iv) at (3) holder hvis og bare hvis: (4) ¬(wêX). Men i lys av (2.1) er dette ekvivalent med: ¬((M,w) ⊨ α). Dette viser at punkt (i) i teoremet holder.

Ad (ii): Anta wêC og at (1) (M.w) ⊨ (α→β) I lys av Definisjon 4.2, punkt (iv), er dette ekvivalent med (2) wêV(→)(Mg(w': (M,w') ⊨ α) , Mg(w': (M,w') ⊨ β)). Sett per definisjon:
(3.1) X = Mg(w': (M,w') ⊨ α) og
(3.2) Y = Mg(w': (M,w') ⊨ β)
Man ser da at (2) sier det samme som: (4) wêV(→)(X,Y). Ved hjelp av Definisjon 4.1, punkt (4) og forutsetningen at wêC kan vi slutte at (4) er ekvivalent med:
(5) wêX → wêY. Ved hjelp av (3.1) og (3.2) følger det så at (5) er ekvivalent med:
(6) ((M,w) ⊨α → (M,w) ⊨ β). Dette viser at punkt (ii) holder.

[4] Mao. at α og β er to lukkede formler i L(D), ie. språket L utvidet med navn på elementene i mengden D

© 2008 Morten Harboe Rognes

Ad (iii): Anta wêC og at (1) (M,w)⊨ (α vβ). Siden (αvβ) per definisjon er en forkortelse for (¬α) → β har vi at (1) er ekvivalent med (2) (M,w) ⊨(¬α) → β. I lys av punkt (ii) i teoremet er dette ekvivalent med (3) (M,w) ⊨(¬α) → (M,w) ⊨β. Punkt (i) i satsen viser at antesedenten i (3) er ekvivalent med ¬((M,w) ⊨α). Dette innebærer at (3) er ekvivalent med: (4) (¬((M,w) ⊨α)) → (M,w) ⊨β. Dette er i sin tur ekvivalent med:
(5) (M,w) ⊨α v (M,w) ⊨β som er det vi ønsker. Dette viser at punkt (iii) holder.

Ad (iv): Anta wêC og at (1) (M,w) ⊨α&β. Per definisjon er α&β en forkortelse for ¬(α → (¬β)). Dette innbærer at (1) er ekvivalent med: (2) (M,w) ⊨¬(α → (¬β)). I lys av punkt (i) og (ii), som vi nå har bevist, er (2) ekvivalent med :
(3) ¬((M,w) ⊨α → ¬((M,w) ⊨β)). Men (3) er setningslogisk ekvivalent med (4) (M,w) ⊨α & (M,w) ⊨β. Dette viser at punkt (iv) holder.

Ad (v): Anta wêC og at (1) (M,w) ⊨(α↔β). Per definisjon er α↔β en forkortelse for (α→β)& (β→α). Fra dette følger at (1) er ekvivalent med (2) (M,w) ⊨(α→β)& (β→α). Ved hjelp av det vi viste under punkt (iv) er dette ekvivalent med:
(3) (M,w) ⊨(α→β) & (M,w) ⊨(β→α). I lys av punkt (ii) i satsen er dette ekvivalent med: (4) ((M,w) ⊨α → (M,w) ⊨β) & ((M,w) ⊨β → (M,w) ⊨α). I sin tur er dette setningslogisk ekvivalent med : ((M,w)⊨α ↔ (M,w) ⊨β) som er det vi ønsker.

Ad (vi): Anta wêC og betrakt (1) (M,w) ⊨(Ax)α . I lys av Definisjon 4.2 er (1) ekvivalent med : (2) wêV(A)(Mg(<a,Mg(w':(M,w') ⊨α;x[n(a)])>: aêD)). Sett per definisjon:
(3) X= Mg(<a,Mg(w': (M,w') ⊨α;x[n(a)])>: aêD). Da er selvfølgelig (2) ekvivalent med:
(4) wêV(A)(X). Man ser også lett ved hjelp av Definisjon 4.1, klausul (iv) , siden wêC, at (4) er ekvivalent med: (5) (Aa)(aêD → wê X(a)). Ved hjelp av (3) har vi dersom aêD at X(a) = Mg(w': (M,w') ⊨α;x[n(a)]). Dette innebærer at (5) er ekvivalent med:
(6) (Aa)(aêD → (M,w) ⊨α;x[n(a)]). Vi har dermed vist at punkt (vi) holder.

Ad (vii): Anta i;1 og i;2 er to navn i L(D) og at wêC. Vi betrakter:
(1) (M,w) ⊨i;1=i;2. I lys av Definisjon 4.2, klausul (iii), er (1) ekvivalent med
(2) <n;-1(i;1), n;-1(i;2)>êV(=)(w). Men ved hjelp av Definisjon 4.1 ser man umiddelbart, siden wêC, at (2) er ekvivalent med n;-1(i;1) = n;-1(i;2). Dette er hva vi ønsker.

Ad (viii): Anta i er et navn i L(D) og betrakt for vilkårlig wêI: (1) (M,w) ⊨η(i). Ved hjelp av Definisjon 4.2 følger det at (1) er ekvivalent med: n;-1(i)êq(w). Som er det vi ønsker.
Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Teorem 6.1. **QED.**

Lemma 6.2 Anta L er et språk for doxastisk logikk. Anta M=<D,C,I,q,V> er en modellstruktur for L. Anta a;1, a;2 enten er navn eller konstanter i L(D) og at (M,w) ⊨(a;1=a;2) Anta α,βêCFm(L(D)) og at β er som α bortsett fra at β eventuelt har en forekomst av a;2 på et eller flere av de steder hvor α har en forekomst av a;1. Da har man at
Mg(w: wêI & (M,w)⊨α) = Mg(w: wêI & (M,w) ⊨β)

Bevis for Lemma 6.2. Satsen bevises ved indukdjon på lengden av formler i L(D). Anta forutsetningene i satsen holder, at a;1, a;2 enten er navn eller konstanter i L(D) og at
(1) (M,w) ⊨(a;1=a;2). Ved hjelp av Definisjon 4.1 og Definisjon 4.2 kan vi da slutte at

© 2008 Morten Harboe Rognes

(2) v(a;1) = v(a;2) der v(a;i) (i=1,2) er V(a;i) om a;i er en konstant i L og v(a;i)= n;-1(a;i) om a;i er et navn i L(D).

Basistrinn: Anta α= P(b;1,...,b;n) der P er et n-ært ikke-logisk predikat i L og de diverse b;i
(i= 1,...,n) er enten konstanter i L eller navn i L(D). Vi har da at β= P(c;1,...,c;n) der c;i=b;i om b;i ikke er a;1 og c;i er enten a;1 eller a;2 om b;i=a;1. Vi må vise at:

(+) Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ α) = Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ β).

Anta derfor at at wêI for vilkårlig w og betrakt : (3) (M,w) ⊨ α. Siden α= P(b;1,...,b;n) er dette ekvivalent med (4) (M,w) ⊨ P(b;1,...,b;n). Ved hjelp av Definisjon 4.2 , klausul (i) ser man at (4) er ekvivalent med: (5) <v(b;1),...,v(b;n)>êV(P)(w). La nå i være et vilkårlig element i {1,...,n}. Vi skiller mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): b;i er ikke identisk med a;1. I så tilfelle har vi c;i=b;i og derfor at v(b;i) = v(c;i).

Tilfelle (ii): b;i = a;1. I så tilfelle må vi igjen se på to tilfelle: Tilfelle (ii.1) c;i = a;1. I så fall har vi b;i=c;i og derfor at v(b;i) = v(c;i). Tilfelle (ii.2): c;i= a;2 og b;i=a;1. Dahar vi ved hjelp av (2) at v(a;1) = v(a;2) og derfor at v(b;i) = v(a;1)=v(a;2)= v(c;i).

Fra dette fremgår det, siden i var et vilkårlig element i {1,...,n} at:

(6) (Ai)(iê{1,...,n} → v(b;i) = v(c;i))

Dette innebærer at (5) er ekvivalent med: (7) <v(c;1),...,v(c;n)>êV(P)(w). Dette er i sin tur ekvivalent med (M,w) ⊨ P(c;1,...,c;n), dvs. (M,w) ⊨ β. Siden w var vilkårlig element i I har vi derfor at (+) holder.

Er α en formel av typen b;1 = b;2 eller en formel av typen η(b;1) gjennomføres beviset på nøyaktig samme måte.

Induksjonstrinn for ¬: Anta α = ¬γ for en eller annen formel γêCFm(L(D)). Da vil β= ¬γ' der γ' er som γ bortsett fra at γ' eventuelt vil ha en forekomst av a;2 på et eller flere steder hvor γ har en forekomst av a;1. Ved hjelp av induksjonshypotesen følger da:

(8) Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ γ) = Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ γ')

Fra dette og Definisjon 4.2 følger så det vi ønsker:

Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ α) = V(¬)(Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ γ))
= V(¬)(Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ γ'))
= Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ β)

Induksjonstrinn for →: Anta α = (γ →δ). Da vil β være (γ'→δ') der γ' (δ') er som γ (δ) eventuelt bortsett fra å ha en forekomst av a;2 på et eller flere steder der γ (δ) har en forekomst av a;1. I lys av induksjonshypotesen har vi derfor:

(9) Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ γ) = Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ γ') og

(10) Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ δ) = Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ δ')

Fra dette og Definisjon 4.2 følger at:

Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ α)
= V(→)(Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ γ) ,Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ δ))
= V(→)(Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ γ') ,Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ δ'))
= Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ β)

Induksjonstrinn for A: Anta α= (Ax)γ der γ er en lukket formel i L(D). Da vil β være (Ax)γ' der γ' er som γ bortsett eventuelt fra å ha en forekomst av a;2 på et eller flere steder hvor γ har en forekomst av a;1. La nå a være et vilkårlig element i D. Da har vi også at γ';x[n(a)] vil være akkurat som γ;x[n(a)] bortsett eventuelt fra å ha en forekomst av a;2 på et eller flere steder hvor γ har en forekomst av a;1. Ved hjelp av induksjonshypotesen har vi derfor for alle aêD:

© 2008 Morten Harboe Rognes

(11) $Mg(\ w: w\hat{e}I\ \&\ (M,w) \models \gamma;x[n(a)]) = Mg(\ w: w\hat{e}I\ \&\ (M,w) \models \gamma';x[n(a)])$

Ved hjelp av dette følger det vi ønsker, nemlig:

$Mg(w: w\hat{e}I\ \&\ (M,w) \models (Ax)\gamma)$
$= V(A)(Mg(<a,Mg(w':(M,w') \models \gamma;x[n(a)])>: a\hat{e}D))$
$= V(A)(Mg(<a,Mg(w':(M,w') \models \gamma';x[n(a)])>: a\hat{e}D))$
$= Mg(w: w\hat{e}I\ \&\ (M,w) \models (Ax)\gamma)$

Induksjonstrinn for T: Anta $\alpha = T;c(\gamma)$ der c enten er en konstant i L eller et navn. Da vi β være $T;c'(\gamma')$ hvor c' enten er a;1 eller a;2 om c = a;1 og c'=c om c er forskjellig fra a;1. Dessuten vil γ' være som γ bortsett eventuelt fra å ha en forekomst av a;2 på et eller flere steder hvor γ har en forekomst av a;1. Ved hjelp av induksjonshypotesen har vi naturligvis:

(12) $Mg(\ w: w\hat{e}I\ \&\ (M,w) \models \gamma) = Mg(w: w\hat{e}I\ \&\ (M,w) \models \gamma')$

Fra forutsetningen $(M,w) \models a;1 = a;2$ følger at (13) $v(c) = v(c')$. Dette er opplagt i det tilfelle at c ikke er a1. Er c lik a1 vil c' enten være a1, da er det trivielt at $v(c)=v(c')$, eller så vil c=a;2 og i så fall har vi $v(c')= v(c)$ siden $(M,w) \models (a;1= a;2)$. Ved hjelp av Definisjon 4.2, (12) og (13) følger:

$Mg(w: w\hat{e}I\ \&\ (M,w) \models T;c(\gamma))$
$= V(T)(v(c), Mg(w': (M,w') \models \gamma))$
$= V(T)(v(c'), Mg(w': (M,w') \models \gamma')) = Mg(w: w\hat{e}I\ \&\ (M,w) \models T;c'(\gamma'))$

Dette viser at satsen også holder i dette tilfellet.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Lemma 6.2. **QED.**

Vi kan nå se nærmere på Teorem 6.1 og gi et bevis for denne satsen.

Bevis for Teorem 6.1[5]: Vi ta først for oss punkt (i) og skal vise at ethvert teorem i kalkylen $K\eta$ er gyldig i enhver $K\eta$-modell. Dette innebærer at vi må vise at alle aksiomene i $K\eta$ er gyldige og at alle slutningsreglene bevarer gyldighet. Det er nødvendig å vise at de setningslogiske aksiomene, U1 - U3, i L er gyldige.

Ad U1: Anta $\gamma = \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$. Vi må vise for enhver $K\eta$-modell M for L at enhver M-instans av γ er sann i enhver verden i M. Anta derfor at (1) M er en vilkårlig $K\eta$-modell for L. En M-instans av γ' av γ vil åpenbart være av formen $\alpha' \rightarrow (\beta' \rightarrow \alpha')$ der α' og β' er lukkede formler i CFm(L(D)), i det vi antar at domenet til M er D. Vi må vise at dersom $\alpha' \rightarrow (\beta' \rightarrow \alpha')$ er en slik vilkårlig M-instans av av γ og w er en vilkårlig klassisk verden i M, ie. $w\hat{e}C$, så har man: $(M,w) \models \alpha' \rightarrow (\beta' \rightarrow \alpha')$. Dette siste må imidlertid holde fordi det i lys av Lemma 6.1 er ekvivalent med $(M,w) \models \alpha' \rightarrow ((M,w) \models \beta' \rightarrow (M,w) \models \alpha')$. Dette siste er åpenbart en setningslogisk sannhet.

Ad U2: $\gamma = ((\neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$. La $M=<D,C,I,q,V>$ være en vilkårlig $K\eta$-modell for L og γ' en vilkårlig M-instans av γ i L(D). Da vil $\gamma' = ((\neg\beta') \rightarrow (\neg\alpha')) \rightarrow (\alpha' \rightarrow \beta')$. La tilslutt w være en vilkårlig verden i C. Vi må da vise at:

(1) $(M,w) \models ((\neg\beta') \rightarrow (\neg\alpha')) \rightarrow (\alpha' \rightarrow \beta')$

Ved hjelp av Lemma 6.1 ser man imidlertid at (1) er ekvivalent med:

(2) $((\neg(M,w) \models \beta') \rightarrow (\neg(M,w) \models \alpha')) \rightarrow ((M,w) \models \alpha' \rightarrow (M,w) \models \beta')$.

Siden (2) åpenbart er en setningslogisk sannhet følger det at (1) holder.

[5] Beviset for denne satsen blir nødvendigvis svært langt når det gjennomføres så detaljert som her. En erfaren leser vil hoppe lett over dette beviset, bare skumme det igjennom, og innse at det er korrekt etter ett minutt.

© 2008 Morten Harboe Rognes

Ad U3: $\delta = (\alpha \rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)) \rightarrow ((\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow (\alpha\rightarrow\gamma))$. La M= <D,C,I,q,V> være en vilkårlig Kη-modell for L og δ' en vilkårlig M-instans av av δ i L(D). La tilslutt w være en vilkårlig verden i C. Da vil

$\delta' = (\alpha' \rightarrow(\beta'\rightarrow\gamma')) \rightarrow ((\alpha'\rightarrow\beta') \rightarrow (\alpha'\rightarrow\gamma'))$. La tilslutt w være en vilkårlig verden i I. Vi må vise at:

(1) $(M,w) \models (\alpha' \rightarrow(\beta'\rightarrow\gamma')) \rightarrow ((\alpha'\rightarrow\beta') \rightarrow (\alpha'\rightarrow\gamma'))$

Ved hjelp av Lemma 6.1 ser man imidlertid at (1) er ekvivalent med:

(2) $((M,w) \models\alpha' \rightarrow((M,w) \models\beta'\rightarrow(M,w) \models\gamma')) \rightarrow$
$(((M,w) \models\alpha'\rightarrow(M,w) \models\beta') \rightarrow ((M,w) \models\alpha'\rightarrow(M,w) \models\gamma'))$

Siden (2) åpenbart er en setningslogisk sannhet følger det at (1) holder.

Ad Q1: Anta $\gamma= (Ax)\alpha \rightarrow \alpha;x[a]$ der a enten er en konstant, eller et variabeltegn, som er substitutibelt for x i α. La M= <D,C,I,q,V> være en vilkårlig Kη-modell for L og γ' en vilkårlig M-instans av γ i L(D). Da vil $\gamma' = (Ax)\alpha' \rightarrow \alpha';x[b]$ der α' er en M-instans av α og b enten er et navn om a er et variabeltegn eller a selv om a er en konstant. Anta w er en vilkårlig verden i C. Det er da nødvendig å vise at:

(1) $(M,w) \models (Ax)\alpha' \rightarrow \alpha';x[b]$. Anta derfor at (2) $(M,w) \models (Ax)\alpha'$. Ved hjelp av Lemma 6.1 følger da: (3) $(Ac)(c\hat{e}D \rightarrow (M,w) \models \alpha';x[n(c)])$.

Tilfelle (i): b er et navn i L(D). Da har vi $n;-1(b)\hat{e}D$ og ved hjelp av (3) at $(M,w) \models \alpha';x[n(n;-1(b))]$. Dette er imidlertid ekvivalent med, siden $b = n(n;-1(b))$, det vi ønsker, nemlig: $(M,w) \models \alpha';x[b]$.

Tilfelle (ii): b er identisk med konstanten a. Da har vi at $V(a)\hat{e}D$. Fra (3) følger: (4) $(M,w) \models \alpha';x[n(V(a))]$. La i være navnet på V(a). Da har vi (5) $i=n(V(a))$, dessuten følger da at (6) $(M,w) \models a = i$. Fra (4) og (5) følger: (7) $(M,w) \models \alpha';x[i]$. Fra dette, (6), Lemma 6.2 og det faktum at b i dette tilfellet er identisk med a følger det vi ønsker: $(M,w) \models \alpha';x[b]$. Dette viser at γ er gyldig i alle Kη-modeller.

Ad Q2: Anta $\gamma =(Ax)(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow (Ax)\beta$ forutsatt at variabeltegnet x ikke forekommer fritt i α. La M= <D,C,I,q,V> være en vilkårlig Kη-modell for L og γ' en vilkårlig M-instans av γ i L(D). Da vil $\gamma' = (Ax)(\alpha' \rightarrow \beta') \rightarrow \alpha' \rightarrow (Ax)\beta'$, der α', β' er henholdsvis M-instanser av α, β, og variabeltegnet x ikke forekommer fritt i α'. La w være et vilkårlig element i C. Vi må vise:

(1) $(M,w) \models (Ax)(\alpha' \rightarrow \beta') \rightarrow \alpha' \rightarrow (Ax)\beta'$

Anta derfor: $(M,w) \models (Ax)(\alpha' \rightarrow \beta')$ Fra dette og Lemma 6.1 følger:

(2) $(Aa)(a\hat{e}D \rightarrow (M,w) \models (\alpha' \rightarrow \beta');x[n(a)])$ Siden x variabeltegnet x ikke forekommer fritt i α' følger herav:

(3) $(Aa)(a\hat{e}D \rightarrow. (M,w) \models \alpha' \rightarrow \beta';x[n(a)])$ Fra dette kan man slutte:

(4) $(Aa)(a\hat{e}D \rightarrow. (M,w) \models \alpha' \rightarrow (M,w) \models \beta';x[n(a)])$

Men siden variabeltegnet a ikke forekommer i $(M,w) \models \alpha'$ kan vi ved hjelp av ren predikatlogikk sluute følgende fra (3):

(5) $(M,w) \models \alpha' \rightarrow (Aa)(a\hat{e}D \rightarrow (M,w) \models \beta';x[n(a)])$. Men fra dette og Lemma 6.1 har vi: (6)$(M,w) \models \alpha' \rightarrow (M,w) \models (Ax)\beta'$. Herav: $(M,w) \models \alpha' \rightarrow (Ax)\beta'$. Dette er hva vi ønsker. Det følger at Q2 er gyldig i alle Kη-modeller.

Ad I1: Anta $\gamma = (x=x)$. Anta videre at M= <D,C,I,q,V> er en vilkårlig Kη-modell for L og γ' en vilkårlig M-instans av γ i L(D). Da vil $\gamma' = (i=i)$ for et eller annet navn i. Men er da w en vilkårlig verden i C ser man umiddelbart at vi har $(M,w) \models i = i$.

© 2008 Morten Harboe Rognes

Ad I2: Anta $\gamma = (x = y \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$ hvor vi forutsetter at β er nøyaktig som α bortsett fra eventuelt å ha en fri forekomst av y på et eller flere av de steder der α har en fri forekomst av x. Anta $M= <D,C,I,q,V>$ er en vilkårlig Kη-modell for L, og at γ' en vilkårlig M-instans av γ i L(D). Da vi $\gamma' = (i = j \rightarrow (\alpha' \rightarrow \beta'))$ der β' er nøyaktig som α' bortsett fra eventuelt å ha en forekomst av j på et eller flere av de steder der α' har en forekomst av i. Vi må vise at at $(M,w) \models (i = j \rightarrow (\alpha' \rightarrow \beta'))$ om w er et vilkårlig element i C. Anta $(M,w) \models i=j$. Det følger da ved hjelp av Lemma 6.2 at $(M,w) \models \alpha' \leftrightarrow (M,w) \models \beta'$, og herav det vi ønsker, nemlig: $(M,w) \models (\alpha' \leftrightarrow \beta')$.

For å vise at alle aksiomene i Kη er gyldige er det også nødvendig å ta for seg skjemaene A1 og A2.

Ad A1: Anta $\gamma = \eta(x) \rightarrow (T;x(\alpha\&\beta) \leftrightarrow T;x(\alpha) \& T;x(\beta))$. Anta videre at $M= <D,C,I,q,V>$ er en vilkårlig Kη-modell for L, og at γ' en vilkårlig M-instans av γ i L(D). Da vil $\gamma' = \eta(i) \rightarrow (T;i(\alpha'\&\beta') \leftrightarrow T;i(\alpha') \& T;i(\beta'))$ der i er navn og α',β' er henholdsvis M-instanser av α og β. La w være et vilkårlig element i C. Det er nødvendig å bevise:

$(M,w) \models \eta(i) \rightarrow (T;i(\alpha'\&\beta') \leftrightarrow T;i(\alpha') \& T;i(\beta'))$

(a) Anta (1) $(M,w) \models \eta(i)$ & $(M,w) \models T;i(\alpha'\&\beta')$. Vi skal bare bevise: $(M,w) \models T;i(\alpha')$ siden beviset for $(M,w) \models T;i(\beta')$ blir helt analogt.

Fra den første konjunkten i (1) følger $n;-1(i) \hat{e} q(w)$. Vi setter $c = n;-1(i)$. Det følger da at $c \hat{e} q(w)$. Fra den andre konjunkten i i (1) har vi i lys av definisjonen av & (Jmf §2) at $(M,w) \models T;i(\neg(\alpha' \rightarrow \neg\beta'))$. Fra dette og Definisjon 4.2 følger:

(3) $w \hat{e} V(T)(c, Mg(w': (M,w') \models \neg(\alpha' \rightarrow \neg\beta')))$

Vi skal nå vise:

(4) $Mg(w': (M,w') \models \neg(\alpha' \rightarrow \neg\beta')) \Omega C$ Inkl $Mg(w': (M,w') \models \alpha')) \Omega C$

Siden $w \hat{e} C$ har vi da, siden M er en Kη-modell og derfor oppfyller kravene i Definisjon 4.3, at $w \hat{e} V(T)(c, Mg(w': (M,w') \models \alpha'))$. Herav følger så $(M,w) \models T;i(\alpha')$ som er det vi ønsker. Det vil altså være tilstrekkelig å bevise (4).

Anta derfor for vilkårlig w at $w \hat{e} Mg(w': (M,w') \models \neg(\alpha' \rightarrow \neg\beta')) \Omega C$. Det følger i så fall at $(M,w') \models \neg(\alpha' \rightarrow \neg\beta')$ & $w \hat{e} C$. Fra dette kan man ved hjelp av Lemma 6.1 slutte: $(M,w') \models \alpha'$ & $w \hat{e} C$. Herav: $w \hat{e} Mg(w': (M,w') \models \alpha')) \Omega C$

At $(M,w) \models \beta'$ følger på lignende vis fra (1) innser man umiddelbart. Vi har dermed bevist at $\eta(x) \rightarrow (T;x(\alpha\&\beta) \rightarrow T;x(\alpha) \& T;x(\beta))$ er gyldig i alle Kη-modeller.

(b) Anta på den annen side at (5) $(M,w) \models \eta(i)$ & $(M,w) \models T;i(\alpha')$ & $(M,w) \models T;i(\beta')$ der w er et vilkårlig element i C. Det vil i såfall være tilstrekkelig å bevise: $(M,w) \models T;i(\alpha'\&\beta')$. Vi setter nå per definisjon:

(6.1) $X= Mg(w: w \hat{e} I \& (M,w) \models \alpha')$

(6.2) $Y= Mg(w: w \hat{e} I \& (M,w) \models \beta')$

(6.3) $Z= Mg(w: w \hat{e} I \& (M,w) \models \alpha' \& \beta')$

Fra den første konjunkten i (5) følger $c \hat{e} q(w)$ siden $c=n;-1(i)$. Fra den andre og den tredje konjunkten i (5) har vi i lys av Definisjon 4.2

(7.1) $w \hat{e} V(T)(c, Mg(w': (M,w') \models \neg\alpha'))$

(7.2) $w \hat{e} V(T)(c, Mg(w': (M,w') \models \neg\beta'))$

Fra (6.1), (6.2), (7.1) og (7.2) følger: $X,Y \hat{e} Mg(z: w \hat{e} V(T)(c,z))$. Anta nå at vi kan bevise:

(8) $Z \Omega C = X \Omega Y \Omega C$

Da følger ved hjelp av Definisjon 4.3 at $Z \hat{e} Mg(x: w \hat{e} V(T)(c,x))$ og derfor at

© 2008 Morten Harboe Rognes

wêV(T)(c, Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ α' & β')). Fra dette og Definisjon 4.2 følger så det vi ønsker, nemlig: (M,w) ⊨ T;i(α'&β'). Fra dette fremgår det at det vil være tilstrekkelig å vise at (8) holder.

Anta for vilkårlig w' at w'ê ZΩC. I lys av (6.3) følger da: (M,w') ⊨ α' & β') & w'êC. I lys av Lemma 6.1 er dette ekvivalent med (M,w') ⊨ α' & (M,w') ⊨ β' & w'êC. Ved hjelp av (6.1) og (6.2) ser man så at dette i sin tur er ekvivalent med: w'êXΩYΩC.

Dermed har vi vist at A1 er gyldig i alle Kη-modeller.

Ad A2: Anta γ = η(x) → ¬T;x(α&¬α). Anta videre at M= <D,C,I,q,V> er en vilkårlig Kη-modell for L, og at γ' en vilkårlig M-instans av γ i L(D).Da vil γ' = η(i) → ¬T;i(α'&¬α') der i er navn og der α' er en M-instans av α. La w være et vilkårlig element i C. Det er nødvendig å bevise:

(M,w) ⊨ η(i) → ¬T;i(α'&¬α')

Anta derfor (1) (M,w) ⊨ η(i). Setter vi c=n;-1(i) følger fra dette: (2) cêq(w). Anta nå for reduktio ad absurdum: (3) (M,w) ⊨ T;i(α'& ¬α'). Fra dette følger:

(4) wêV(T)(c, Mg(w: (M,w) ⊨ α'&¬α')) Sett nå per definisjon:

(5.1) Z = Mg(w: (M,w) ⊨ α'&¬α')

(5.2) X = Mg(w: (M,w) ⊨ α')

(5.3) Y = Mg(w: (M,w) ⊨ ¬α')

Fra (4) og (5.1) følger: (6) ZêMg(x: wêV(T)(c,x)). Det vil nå være tilstrekkelig å gi bevis for følgende forhold:

(7) ZΩC Inkl XΩC

(8) ZΩC Inkl YΩC

(9) YΩC = C -(XΩC)

Fra (7),(8) sammen med (6) følger ved hjelp av Definisjon 4.3

(10) X,YêMg(x: wêV(T)(c,x)). Men fra dette og (9) har man, igjen ved hjelp av Definisjon 4.3, at ¬(YêMg(x: wêV(T)(c,x)))som åpenbart strider mot (10).

Ved hjelp av Lemma 6.1 skulle det imidlertid være lett å se at (7) - (9) holder.
Det følger at A2 er gyldig i alle Kη-modeller.

Vi har nå vist alle de aksiomskjemaene som inngår i Kη er gyldige. Det gjenstår imidlertid å vise at slutningsreglene i Kη bevarer gyldighet. Dette innebærer at vi må vise at MP, UG, R1 og R2 er gyldighetsbevarende.

Ad MP: Anta at α er gyldig i alle Kη-modeller M og at (α→β) er det. Vi må da vise at β også er gyldig i alle Kη-modeller. Anta derfor M=<D,C,I,q,V> er en vilkårlig Kη-modell og at β' er en vilkårlig M-instans av β. Anta w er et vilkårlig element i C La nå α' være en M-instans av α som er slik at hvis det finnes noen variabelregn felles for α og β så har vi satt inn de samme navnene for dem. Da vil også α'→β' være en M-instans av α→β. Siden α er gyldig har vi at (M,w) ⊨ α'. Siden også α'→β' er gyldig har vi enn mer at: (M,w) ⊨ (α'→ β'). Men fra disse to forhold og Lemma 6.1 følger det vi ønsker, nemlig: (M,w) ⊨ β'.

Det bør bemerkes her at denne regelen bevarer gyldighet uansett hvilken av de modellklassene vi har nevnt som legges til grunn. MP er gyldighetsbevarende hva enten vi betrakter klassen av Kη- modeller, Kη- -modeller, Kη--modeller som oppfyller det strenge konjunksjonskravet eller Kη+-modeller.

Ad UG: Anta α er gyldig i alle Kη-modeller. Vi må da vise at (Ax)α er det samme. Anta derfor at M=<D,C,I,q,V> er en vilkårlig Kη-modell og at (Ax)α' er en vilkårlig M-instans av (Ax)α.

© 2008 Morten Harboe Rognes

Anta α' inneholder x som et fritt variabeltegn. Men siden α var gyldig i enhver Kη-modell vil vi ha, om w er et vilkårlig element i C, at alle M-instanser av α er sanne i w. Dette innebærer at vi har, for alle navn j i L(D), at (M,w) ⊨ α';x[j]. Dette impliserer
(Ac)(cêD → (M,w) ⊨ α';x[n(c)]) og følgelig: (M,w) ⊨ (Ax)α'. Men (Ax)α' var en vilkårlig M-instans av (Ax)α. Dessuten var M en vilkårlig valgt modell og w en vilkårlig klassisk verden i denne modell. Det følger at (Ax)α er gyldig i enhver Kη-modell.

Den bemerkningen som vi kom med ovenfor i forbindelse med MP kan gjentas her: UG bevarer gyldighet uansett hvilken av de modellklassene vi har nevnt og definert i §4 som legges til grunn. MP er gyldighetsbevarende hva enten vi betrakter klassen av Kη- modeller, Kη--modeller, Kη--modeller som oppfyller det strenge konjunksjonskravet eller Kη+-modeller.

Ad R1: Anta (1) α er gyldig i enhver Kη-modell. Vi skal vise at da vil også γ=(η(x) → T;x(α)) være gyldig i enhver slik modell. Anta nå at (2) M=<D,C,I,q,V> er en vilkårlig Kη-modell. Anta for vilkårlig w at (3) wêC. La γ' være en vilkårlig M-instans av γ. Da har vi at (4) γ' = (η(j) → T;j(α')) der j er et navn og α' er en M-instans av α. Det vil være tilstrekkelig å vise (5) (M,w) ⊨ (η(j) → T;j(α')). Fra (1) følger, siden α' er en M-instans av α og α er gyldig i enhver Kη-modell at:

(6) (Aw)(wêC → (M,w) ⊨ α'). Dette impliserer at

(7) C Inkl Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ α')

Anta nå (8) (M,w) ⊨ η(j). Sett per definisjon: c=n;-1(j). Det følger da at (9) cêq(w). Fra dette, (6) og krav (i) i Definisjon 4.3 har vi:

Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ α')ê Mg(x: wêV(T)(c,x)). Men fra dette følger i lys av Definisjon 4.2 det vi ønsker, nemlig: (M,w) ⊨ T;j(α'). Dette viser at (5) holder, og dermed at (M,w) ⊨ γ'. Men siden M var en vilkårlig modell og w en vilkårlig klassisk verden i M og γ' en vilkårlig M-instans av γ følger det at γ er gyldig i enhver Kη-modell.

Også her kan det bemerkes at vi ikke uten videre behøver å begrense oss til Kη-modeller. For at regelen R1 skal være gyldighetsbevarende med hensyn på en klasse av modeller av den typen som ble avgrenset ved Definisjon 4.1 og Definisjon 4.2 er det bare nødvendig at modellen M= <D,C,I,q,V> oppfyller kravet:

(Aw)(Ax)(wêC & xêq(w) → (Ay)(yêPt(I) & C Inkl y → yêMg(Z: wêV(T)(x,Z)))
mao. kravet (i) i Definisjon3.

Ad R2: Anta (1) α→β er gyldig i enhver Kη-modell. Vi skal vise at da vil også γ = (η(x) →. T;x(α) → T;x(β)) er gyldig i enhver Kη-modell. Anta derfor at (2) M=<D,C,I,q,V> er en vilkårlig Kη-modell og at (3) wêC for vilkårlig w. La γ' være en vilkårlig M-instans av γ. Da har vi for et eller annet navn j at γ' = η(j) → T;j(α') → T;j(β') der α' og β' er henholdsvis M-instanser av α og β. Det følger at (α' →β') er en M-instans av (α→β). Derfor har vi i henhold til (1) at:

(4) (Aw)(wêC → (M,w) ⊨ α' → (M,w) ⊨ β')

Fra dette følger: (5) Mg(w:wêI & (M,w) ⊨α')ΩC Inkl Mg(w:wêI & (M,w) ⊨β')ΩC.
Anta nå (6) (M,w) ⊨ η(j) & (M,w) ⊨ T;j(α'). og sett c=n;-1(j). For å vise at γ' er gyldig vil det da være tilstrekkelig å bevise : (7) (M,w) ⊨ T;j(β').

Fra den første konjunkten i (6) følger:

(8) cêq(w).

Fra den andre konjunkten i (6) kan man slutte:

(9) wêV(T)(c, Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ α')).

Fra (5),(8), (9) og krav (iii) i Definisjon 4.3 følger det at

© 2008 Morten Harboe Rognes

(10) wêV(T)(c, Mg(w:wêI & (M,w) ⊨β')). Men det impliserer i lys av Definisjon 4.2 at (M,w) ⊨ T;j(β'). Dette siste er hva vi ønsker. Dermed har vi vist at R2 også bevarer gyldighet.

Igjen bør det bemerkes at R2 vil være gyldig i enhver modellstruktur av den typen som er avgrenset ved Definisjon 4.1 og Definisjon 4.3 så snat den bare oppfyller kravet (iii) som er nevnt i Definisjon 3. Det eneste som kreves er at M=<D,C,I,q,V> er en modellstruktur basert på unormale verdener må vi ha at Mg(Z: wêV(T)(x,Z)) er lukket under logisk konsekvens om xêq(w) der wêC.

Vi har nå gitt et fullstendig bevis for punkt (i) i Teorem 6.1. Vi har vist at alle aksiomskjemaene i Kη er gyldige i enhver Kη-modellstruktur for L og at alle slutningsreglene bevarer gyldighet. Siden Kη- er som systemet Kη bare ved at man har fjernet aksiomet A2 og dessuten kravet (iv) i Definisjon 4.3 følger det fra det vi har bevist at alle teoremene i Kη- er gyldige i alle Kη- modellstrukturer.

Som man ser har vi altså vist både punkt (i) og (ii) i Teorem 6.1.
Det gjenstår å vise at gyldighetsteoremet holder for systemet Kη+. I lys av det vi allerede har bevist vil det være tilstrekkelig å vise at aksiomskjemaene E1, E2 og TBF er gyldige i enhver Kη+ -modellstruktur for L.

Ad E1: Anta (1) M = <D,C,I,q,V> er en vilkårlig Kη- -modellstruktur og at w er et vilkårlig element i C, ie. (2) wêC. La γ' være en vilkårlig M-instans av E1. Da vil det finnes navn i,j,k slik at γ'= (η(i) → (j=k → T;i(j=k)). Det vil altså være nok å vise at (3) (M,w) ⊨ γ'
La oss sette per definisjon c= n;-1(i), d= n;-1(j) og e=n;-1(k). Dette innebærer at c, d og e er henholdsvis de objektene som navnene i,j,k er navn på. Anta nå (4) (M,w) ⊨ η(i) og (5) (M,w) ⊨ j=k. Fra (4) følger at (6) cêq(w). Fra (5) og Definisjon 4.2 har vi (6) <d,e>êV(=)(w). Siden wêC følger fra dette og Definisjon 4.1 at (7) d=e. Anta w' er et vilkårlig objekt i C. Da følger ved hjelp av Definisjon 4.1, klausul (iv), og (7) at <d,e>êV(=)(w'). Dette impliserer (M,w') ⊨ j=k. Det følger fra dette at vi har:

(8) C Inkl Mg(w': wêI & (M,w') ⊨ j=k)

Fra dette, (6) og det første punktet i Definisjon 4.5 følger:

(9) wêV(T)(c, Mg(w': wêI & (M,w') ⊨ j=k))

Men i lys av Definisjon 4.2 er dette siste ekvivalent med det vi ønsker, nemlig (M,w) ⊨ T;i(j=k). Dette viser at (3) holder og derfor at E1 er gyldig i alle Kη+-modellstrukturer.

Ad E2: Anta (1) M = <D,C,I,q,V> er en vilkårlig Kη- -modellstruktur og at w er et vilkårlig element i C, ie. (2) wêC. La γ' være en vilkårlig M-instans av E1. Da vil det finnes navn i,j,k slik at γ'= (η(i) → (j≠k → T;i(j≠k)). Det vil altså være nok å vise at (3) (M,w) ⊨ γ'
La oss sette per definisjon c= n;-1(i), d= n;-1(j) og e=n;-1(k). Dette innebærer at c, d og e er henholdsvis de objektene som navnene i,j,k er navn på. Anta nå (4) (M,w) ⊨ η(i) og (5) (M,w) ⊨ j≠k. Fra (4) følger at (6) cêq(w). Fra (5) og Definisjon 4.2 har vi (6) ¬(<d,e>êV(=)(w)). Siden wêC følger fra dette og Definisjon 4.1 at (7) d≠e. Anta w' er et vilkårlig objekt i C. Da følger ved hjelp av Definisjon 4.1, klausul (iv), og (7) at ¬(<d,e>êV(=)(w')). Dette impliserer (M,w') ⊨ j≠k. Det følger fra dette at vi har:

(8) C Inkl Mg(w': wêI & (M,w') ⊨ j≠k)

Fra dette, (6) og det første punktet i Definisjon 4.5 følger:

(9) wêV(T)(c, Mg(w': wêI & (M,w') ⊨ j≠k))

Men i lys av Definisjon 4.2 er dette siste ekvivalent med det vi ønsker, nemlig (M,w) ⊨ T;i(j≠k). Dette viser at (3) holder og derfor at E2 er gyldig i alle

© 2008 Morten Harboe Rognes

Kη+-modellstrukturer.

Ad TBF: Anta (1) M=<D,C,I,q,V> er en vilkårlig Kη+-modellstruktur og at w er et vilkårlig element i C, dvs. (2) wêC. En M-instans av TBF vil være en formel av typen η(i) →. (Ay)T;i(α) → T;i(Ay)α) der α er en lukket formel i L(D). Setter vi γ =(η(i) →. (Ay)T;i(α) → T;i((Ay)α)), vil det derfor være tilstrekkelig å vise: (M,w) ⊨ γ. Anta derfor (3) (M,w) ⊨ η(i) og (4) (M,w) ⊨ (Ay)T;i(α). Fra det siste følger ved hjelp av Lemma 6.1: (5) (Aa)(aêD → (M,w) ⊨ T;i(α;y[n(a)])). Fra dette følger så i sin tur ved hjelp av Definisjon 4.2:

(6) (Aa)(aêD → wêV(T)(n(i), Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ α;y[n(a)]))

La oss sette per definisjon (6.1) X;a = Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ α;y[n(a)]). Ved hjelp av denne definisjonen kan da (6) reformuleres slik:

(7) (Aa)(aêD → wêV(T)(n(i), X;a)

La oss nå sette per definisjon: (8) Y = Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ (Ay)α). La oss også definere T;w(c) ved å sette (9) T;w(c) = Mg(Z: ZêPt(I) & wêV(T)(c,Z)). Da kan (7) omskrives til:

(10) (Aa)(aêD → X;aêT;w(n;-1(i))

Man har nå: (11) Mg(X;a : aêD) Inkl T;w(n;-1(i))

Vi gir et bevis for (11): Anta yê Mg(X;a: aêD). Da har vi y= X;a for noe aêD. Fra dette og (10) følger yêT;w(n;-1(i)). Det er heller ikke vanskelig å se at (11) impliserer (10).

Vi bemerker nå at det følgende holder:

(12) Mg(X;aΩC: aêD) = Mg(xΩC: xêMg(X;a: aêD))

Dette kan vises slik: Anta yêMg(X;aΩC: aêD). Da finnes det a;0 slik at y=X;(a;0)ΩC og a;0êD. Da har vi X;(a;0)êMg(X;a: aêD). Det følger at yêMg(xΩC: xêMg(X;a: aêD)). Anta på den annen side at yêMg(xΩC: xêMg(X;a: aêD)). Da finnes det noe x slik at y= xΩC og xêMg(X;a: aêD). Da finnes det a0 slik at x=X;a0 & a0êD. Da y= X;a0ΩC og a0êD. Det følger at yêMg(X;aΩC: aêD).

I lys av (12) er det nå tilstrekkelig å bevise:

(13) YΩC = SN(Mg(X;a ΩC: aêD)

(a) Inklusjonen mot venstre: Anta (14) wêSN(Mg(X;a ΩC: aêD). Fra dette følger: (Aa)(aêD → wê(X;a ΩC)). Herav: (Aa)(aêD → (wêC & wêX;a)). Siden D er en ikke-tom mengde følger herav (15) (Aa)(aêD → wêX;a) & wêC. Dette impliserer i lys av definisjonen av X;a: (Aa)(aêD → (M,w) ⊨ α;y[n(a)]) & wêC. Men fra dette følger: (M,w) ⊨ (Ay)α & wêC. Med andre ord har vi: wêYΩC.

(b) Inklusjonen mot høyre er relativt uproblematisk: Anta wêYΩC for vilkårlig w. Da wêC og (M,w) ⊨ (Ay)α. Fra dette følger ved hjelp av Lemma (6.1):

wêC & (Aa)(aêD → (M,w) ⊨ α;y[n(a)]). herav har vi da ved hjelp av definisjonen av X;a: wêC & (Aa)(aêD → wêX;a). Men dette impliserer: (Aa)(aêD → wê(X;a Ω C)). Det følger at wêSN(Mg(X;aΩC : aêD). Dermed har vi godtgjort (13).

Fra (7), (12), (13) og det strenge konjunksjonskravet i Definisjon 4.5 følger så YêT;w(n;-1(i)). Da wêV(T)(n;-1(i), Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ (Ay)α)). Herav har vi så ved hjelp av Definisjon 4.2 at (M,w) ⊨ T;i((Ay)α).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for at TBF, den doxastiske versjonen av Barcan-formelen er gyldig i alle Kη+-modellstrukturer. Men med dette har vi også gitt et fullstendig bevis for gyldighetsteoremet, Teorem 6.1. **QED.**

© 2008 Morten Harboe Rognes

Vi har imidlertid ovenfor også, implisitt, gitt et bevis for et teorem som er noe sterkere enn Teorem 6.1. La oss bruke "Val_Kη-*(α)" som forkortelse for α er gyldig i alle Kη-modellstrukturer basert på unormale verdener som oppfyller det strenge konjunksjonskravet". Det gyldighetsteoremet vi da har i tankene kan formuleres slik:

Teorem 6.2: Anta L er et språk for doxastisk logikk og at α er en formel i L. Da gjelder:
(i) Kη[E1,E2 |- α → Val_Kη(α)
(ii) Kη-[E1,E2] |- α → Val_Kη-(α)
(iii) Kη-[E1,E2, TBF] |- α → Val_Kη-*(α)
(iii) Kη+ |- α → Val_Kη+(α)

§7 Noen teoremer som kaster et visst lys over hvordan man kan konstruere modeller for Kη+

I det følgende skal vi gi et bevis forden følgende påstand.

Teorem 7.1: Anta L er et språk for doxastisk logikk uten konstanter. Anta at følgende holder:
(i) D, C, og I ikke-tomme mengder der C Inkl I
(ii) ξ : (I-C) -(1-1, på)→ Pt(CFm(L(D))
(iii) Φ: DxC → Pt(CFm(L(D))
(iv) R er en funksjon som til ethvert n-ært predikat i L tilordner dette en funksjon i mengden Pt(D^n)^C. Vi krever: <x,y>êR(=)(w) ↔ x=y om x,yêD og wêC
(v) q er funksjon i mengden Pt(D)^C Vi krever at R(η)(w) = q(w) om wêC
Gitt disse forutsetningene finnes det q* og V slik at
(1) M= <D,C,I,q*,V> er en modellstruktur for L basert på finstrukturerte utsagn.
(2) q(w) = q*(w) om wêC
(3) For alle wêC har man om αêCFm(L(D)) og i er et navn i L(D) at:
(M,w) ⊨ T;i(α) ↔ αêΦ(n;-1(i),w)

Bevis: Vi definerer først induktivt relasjonen ⊨ ved induksjon på lengden av lukkede formler i L(D). Dette skjer på følgende måte:
(1) Er P et n-ært predikat i L, og a;i et navn i L(D) for i=1,...,n, setter vi per definisjon:
(M,w) ⊨ P(a;1,...,a;n) ↔ <n;-1(a;1),....,n;-1(a;n)>êR(P)(w) forutsatt wêC,
Er wê(I-C) setter vi: (M,w) ⊨ P(a;1,...,a;n) ↔ P(a;1,...,a;n)êξ(w) om wê(I-C)
(2) Er γ ê CFm(L(D)) en formel av typen ¬α setter vi
(M,w) ⊨ ¬α ↔ ¬((M,w) ⊨ α) om wêC
(M,w) ⊨ ¬α ↔ (¬α)êξ(w) om wê(I-C)

(3) Er γ en lukket formel i L(D) av typen (α→β) setter vi:
(M,w) ⊨ (α→β) ↔. ((M,w) ⊨ α → (M,w) ⊨ β) om wêC
(M,w) ⊨ (α→β) ↔ (α→β)êξ(w) om wê(I-C)

(4) Er γ en lukket formel i L(D) av typen (Ax)α setter vi:
(M,w) ⊨ (Ax)α ↔ (Aa)(aêD → (M,w) ⊨ α;x[n(a)]) om wêC
(M,w) ⊨ (Ax)α ↔ (Ax)αêξ(w) om wê(I-C)

© 2008 Morten Harboe Rognes

(5) Er γ en lukket formel i L(D) av typen T;a(α) setter vi
$(M,w) \models T;a(\alpha) \leftrightarrow \alpha \hat{e} \Phi(n;-1(a),w)$ om $w \hat{e} C$.
$(M,w) \models T;x(\alpha) \leftrightarrow T;a(\alpha) \hat{e} \xi(w)$ om $w \hat{e} (I-C)$.

Man ser da at $(M,w) \models \alpha$ er definert for alle verdener i I og alle lukkede formler i L(D). Dette innebærer selvfølgelig at man har for alle α at $Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \alpha) \hat{e} Pt(I)$.

Siden D,C,I er gitt gjenstår det å definere funksjonene q* og V slik at de oppfyller kravene som stilles til en modellstruktur for L.

Vi definerer først q* ved å sette $q^*(w) = q(w)$ om $w \hat{e} C$. Er $w \hat{e} (I-C)$ definerer vi q* slik $q^*(w) = Mg(a: a \hat{e} D \ \& \ \eta(n(a)) \hat{e} \xi(w))$. Dermed er mengden q(w) fiksert for alle $w \hat{e} I$. Man ser også at q* definert på denne måten åpenbart oppfyller kravet (2) i satsen.

Vi vender oss dernest mot konstruksjonen av funksjonen V.

(A) Vi må først definere V(P) når P er et n-ært predikat i L (n>=0). Dette gjør vi ved å sette at $V(P)(w) = R(P)(w)$ om $w \hat{e} C$. Er $w \hat{e} (I-C)$ setter vi
$V(P)(w) = Mg(<a;1,..,a;n>: P(n;-1(a;1),...,n;-1(a;n)) \hat{e} \xi(w))$
Man ser at om V(P) defineres på denne måten har man at
$V(P)(w) = Mg(<a;1,..,a;n>: (M,w) \models P(n(a;1),...,n(a;n)))$ for alle $w \hat{e} I$
Siden $V(P)(w) = R(P)(w)$ om $w \hat{e} C$ følger det fra den fjerde forutsetningen i teoremet at vi har: $<x,y> \hat{e} V(=)(w) \leftrightarrow x=y$ om $w \hat{e} C$. Dette innebærer at V(=) oppfyller de krav som er nevnt i Definisjon 1.1 i §1.

Siden vi har på basis av forutsetningene i satsen og definisjonen av V at $V(\eta)(w) = R(\eta)(w) = q(w)$, om $w \hat{e} C$, følger det også at V(P) oppfyller de krav som stilles i Definisjon 4.1 i §4.

(B) Dernest er det nødvendig å definere $V(\neg)$. Er $X = Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \alpha)$ for noen formel α i L(D) setter vi $V(\neg)(X) = Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \neg\alpha)$. Er $X \hat{e} Pt(I)$, og finnes det ingen formel α i L(D) slik at $X = Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \alpha)$, setter vi
$V(\neg)(X) = Mg(w: w \hat{e} C \ \& \ \neg(w \hat{e} X))$
Man ser fra denne definisjonen at $V(\neg)$ oppfyller de krav som stilles til $V(\neg)$. Fra definisjonen og definisjonen av $\models$ fremgår det at vi har om $X \hat{e} Pt(I)$ og $w \hat{e} C$ at
$w \hat{e} V(\neg)(X) \leftrightarrow \neg(w \hat{e} X)$

(C) Vi må selvfølgelig også definere $V(\rightarrow)$. Anta $X,Y \hat{e} Pt(I)$. Finnes det da $\alpha,\beta \ \hat{e} Fm(L(D))$ slik at
$X = Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \alpha)$ og $Y = Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \beta)$
setter vi $V(\rightarrow)(X,Y) = Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,\nu,w) \models (\alpha \rightarrow \beta))$. Finnes det ikke noen slike formler α,β setter vi $V(\rightarrow)(X,Y) = Mg(w: w \hat{e} C \ \& \ (w \hat{e} X \rightarrow w \hat{e} Y))$

Også ved denne definisjonen fremgår det at den oppfyller kravet nevnt under (iv) i Definisjon 4.1 i §4. Har vi at $X,Y \hat{e} Pt(I)$ og $w \hat{e} C$ ser man i lys av definisjonen gitt rett ovenfor av $\models$ at
$w \hat{e} V(\rightarrow)(X,Y) \leftrightarrow (w \hat{e} X \rightarrow w \hat{e} Y))$

(D) Når det gjelder V(A) defineres denne funksjonen slik: Anta $X \hat{e} Pt(I) \wedge D$. Anta det finnes $\alpha \hat{e} L(D)$, og variabeltegn x, slik at $X = Mg(<a, Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \alpha;x[n(a)])>: a \hat{e} D)$. Da setter vi per definisjon: $V(A)(X) = Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models (Ax)\alpha)$. Hvis det ikke finnes noen formel α og noe variabeltegn x slik at

© 2008 Morten Harboe Rognes

X= Mg(<a, Mg(w: wêI & (M,w) ╞ α;x[n(a)])>: aêD)
setter vi V(A)(X) = Mg(w: wêC & (Aa)(aêD → wêX(a))).

I denne forbindelse ser man lett, i lys av punkt (4) ovenfor i definisjonen av av sannhetsrelasjonen ╞, at om XêPt(I)^D og wêC har vi:

wêV(A)(X) ↔ (Aa)(aêD → wêX(a))

(E) Anta <a,X>êDxPt(I). Anta det finnes en formel αêCFm(L(D)) slik at X= Mg(w: wêI & (M,w) ╞ α). Da setter vi V(T)(a,X) = Mg(w: wêI & (M,w) ╞ T;n(a)(α)) Finnes det ikke noen formel αêFm(L(D))) slik at X= Mg(w: wêI & (M,w) ╞ α) setter vi:

V(T)(a,X) = ø

Dermed er V og q* fullstendig definert. Man ser nå lett at V oppfyller alle de krav som er gitt i Definisjon 4.1 i §4. Imidlertid skulle det også være lett å innse at man fra definisjonen av V og ╞ ovenfor også kan vise at disse relasjonene oppfyller alle de krav som er nevnt i Definisjon 4.2 i §4. Dermed har vi vist at M=<D,C,I,q*,V> er en modellstruktur og at den oppfyller alle de krav som er nevnt i teoremet. **QED.**

Teorem 7.2: La L være språket til doxastisk logikk som ikke inneholder noen konstanter. Da finnes det en modellstruktur M=<D,C,I,q,V> og en funksjon ξ som oppfyller følgende krav:

(i) ξ : (I-C) - (1-1,på)→ Pt(CFm(L(D))

(ii) Er α êCFm(L(D)) har man at
Mg(w: wê(I-C) & (M,w) ╞ α) = ξ;-1"Mg(x: xêPt(CFm(L(D)) & αêx)

(iii) Er α;1, α;2êCFm(L(D) og α;1 ≠ α;2 har man:
(a) Mg(w: wê(I-C) & (M,w) ╞ α;1) ≠ Mg(w: wê(I-C) & (M,w) ╞ α;2) og
(b) Mg(w: wêI & (M,w) ╞ α;1) ≠ Mg(w: wêI & (M,w) ╞ α;2)

Det bør bemerkes at punkt (iii) i satsen følger fra punkt (ii) siden ξ er en-entydig. Det skulle derfor ikke være nødvendig å gi noe eget bevis for at dette holder.

Bevis: Siden språket L er fiksert på forhånd har vi en viss frihet når det gjelder konstruksjonen av de enkelte komponentene i modellstrukturen M. Vi setter:

(1) D = Reell

Med andre ord indentifiserer vi mengden av alle de mulige individene med mengden av de reelle tall. Vi kan også identifisere mengden C av de "klassiske" mulige verdenene med mengden av de reelle tall. Vi setter derfor:

(2) C = Reell

Siden L er fastsatt vil også L(D), språket L utvidet med navn på de ymse elementene i D være fastsatt. Dermed er også mengden av de lukkede formlene i L(D), CFm(L(D)) fastsatt. Vi lar I-C være {Reell}x Pt(CFm(L(D)). Dette innebærer at I-C er mengden av alle par <x,y> der x er mengden av de reelle tall og y er en delmengde av CFm(L(D)). Formelt sett setter vi:

(3) I-C = {Reell}x Pt(CFm(L(D))

Vi definerer nå den en-entydige avbildningen ξ ved å sette

(4) ξ(x) = (x);2

I lys av (3) ser man lett at denne avbildningen ξ er en-entydig og på Pt(CFm(L(D)). Dermed har vi definert D, I,C og ξ slik at

(5) ξ: I-C -(1-1,på) → Pt(Cfm(L(D))

© 2008 Morten Harboe Rognes

For å konstruere modellstrukturen M=<D,C,I,q*,V> er det nødvendig å konstruere q og V. Også her har vi en viss frihet. Vi kan åpenbart velge ut to funksjoner R og q som oppfyller kravene (iv) og (v) i Teorem 7.1. Vi velger først ut en R der:

(6) R er en funksjon som til ethvert n-ært predikat i L tilordner dette en funksjon i mengden Pt(D^n)^C.

Når det gjelder identitetspredikatet "=" skulle det ikke være vanskelig å anordne det slik at R oppfyller det følgende krav:

(7) $\langle x,y\rangle \hat{e} R(=)(w) \leftrightarrow x=y$ om $x,y \hat{e} D$ og $w \hat{e} C$

Vi kan også velge ut vilkårlig en funksjon q i mengden Pt(D)^C og sette:

(8) $R(\eta)(w) = q(w)$ om $w \hat{e} C$

Vi velger også ut en funksjon Φ der vi har:

(9) Φ: $D \times C \rightarrow Pt(CFm(L(D)))$

Dette er åpenbart mulig.

Dermed har vi definert alle komponentene D,C,I og delvis q* i modellstrukturen. Det gjenstår å definere fullstendig funksjonen V. Vi følger nå nøyaktig beviset for Teorem 7.1:

Vi definerer først induktivt relasjonen $\models$ ved induksjon på lengden av lukkede formler i L(D). Dette skjer på følgende måte:

(10) Er P et n-ært predikat i L, og a;i et navn i L(D) for i=1,...,n, setter vi per definisjon:
$(M,w) \models P(a;1,...,a;n) \leftrightarrow \langle n;-1(a;1),....,n;-1(a;n)\rangle \hat{e} R(P)(w)$ forutsatt $w \hat{e} C$,
Er $w \hat{e} (I-C)$ setter vi: $(M,w) \models P(a;1,...,a;n) \leftrightarrow P(a;1,...,a;n) \hat{e} \xi(w)$ om $w \hat{e} (I-C)$

(11) Er $\gamma \hat{e} CFm(L(D))$ en formel av typen $\neg\alpha$ setter vi
$(M,w) \models \neg\alpha \leftrightarrow \neg((M,w) \models \alpha)$ om $w \hat{e} C$
$(M,w) \models \neg\alpha \leftrightarrow (\neg\alpha) \hat{e} \xi(w)$ om $w \hat{e} (I-C)$

(12) Er γ en lukket formel i L(D) av typen $(\alpha \rightarrow \beta)$ setter vi:
$(M,w) \models (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow . ((M,w) \models \alpha \rightarrow (M,w) \models \beta)$ om $w \hat{e} C$
$(M,w) \models (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \xi(w)$ om $w \hat{e} (I-C)$

(13) Er γ en lukket formel i L(D) av typen $(Ax)\alpha$ setter vi:
$(M,w) \models (Ax)\alpha \leftrightarrow (Aa)(a \hat{e} D \rightarrow (M,w) \models \alpha;x[n(a)])$ om $w \hat{e} C$
$(M,w) \models (Ax)\alpha \leftrightarrow (Ax)\alpha \hat{e} \xi(w)$ om $w \hat{e} (I-C)$

(14) Er γ en lukket formel i L(D) av typen $T;a(\alpha)$ setter vi
$(M,w) \models T;a(\alpha) \leftrightarrow \alpha \hat{e} \Phi(n;-1(a),w)$ om $w \hat{e} C$.
$(M,w) \models T;x(\alpha) \leftrightarrow T;a(\alpha) \hat{e} \xi(w)$ om $w \hat{e} (I-C)$.

Man ser da at $(M,w) \models \alpha$ er definert for alle verdener i I og alle lukkede formler i L(D). Dette innebærer selvfølgelig at man har for alle α at $Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \alpha) \hat{e} Pt(I)$.

Vi definerer først q* ved å sette $q^*(w) = q(w)$ om $w \hat{e} C$. Er $w \hat{e} (I-C)$ definerer vi q* slik $q^*(w) = Mg(a: a \hat{e} D \ \& \ \eta(n(a)) \hat{e} \xi(w))$. Dermed er mengden q(w) fiksert for alle $w \hat{e} I$.

Vi vender oss dernest mot konstruksjonen av funksjonen V.

© 2008 Morten Harboe Rognes

(A) Vi må først definere V(P) når P er et n-ært predikat i L (n>=0). Dette gjør vi ved å sette at V(P)(w) = R(P)(w) om wêC. Er wê(I-C) setter vi

V(P)(w) = Mg(<a;1,...,a;n>: P(n;-1(a;1),....,n;-1(a;n))êξ(w))

Man ser at om V(P) defineres på denne måten har man at

V(P)(w) = Mg(<a;1,...,a;n>: (M,w) ⊨ P(n(a;1),....,n(a;n))) for alle wêI

Siden V(P)(w) = R(P)(w) om wêC følger det fra den fjerde forutsetningen i teoremet at vi har: <x,y>êV(=)(w) ↔ x=y om wêC. Dette innebærer at V(=) oppfyller de krav som er nevnt i Definisjon 1.1 i §1.

Siden vi har på basis av forutsetningene i satsen og definisjonen av V at V(η)(w) = R(η)(w)= q(w), om wêC, følger det også at V(P) oppfyller de krav som stilles i Definisjon 4.1 i §4.

(B) Dernest er det nødvendig å definere V(¬). Er X= Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ α) for noen formel α i L(D) setter vi V(¬)(X) = Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ ¬α). Er XêPt(I), og finnes det ingen formel α i L(D) slik at X= Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ α), setter vi

V(¬)(X) = Mg(w: wêC & ¬(wêX))

Man ser fra denne definisjonen at V(¬) oppfyller de krav som stilles til V(¬). Fra definisjonen og definisjonen av ⊨ fremgår det at vi har om XêPt(I) og wêC at

wêV(¬)(X) ↔ ¬(wêX)

(C) Vi må selvfølgelig også definere V(→). Anta X,YêPt(I). Finnes det da α,β êFm(L(D)) slik at

X= Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ α) og Y= Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ β)

setter vi V(→)(X,Y) = Mg(w: wêI & (M,ν,w) ⊨ (α→β)). Finnes det ikke noen slike formler α,β setter vi V(→)(X,Y) = Mg(w: wêC & (wêX → wêY))

Også ved denne definisjonen fremgår det at den oppfyller kravet nevnt under (iv) i Definisjon 4.1 i §4. Har vi at X,YêPt(I) og wêC ser man i lys av definisjonen gitt rett ovenfor av ⊨ at

wêV(→)(X,Y) ↔ (wêX → wêY))

(D) Når det gjelder V(A) defineres denne funksjonen slik: Anta XêPt(I)^D. Anta det finnes αêL(D), og variabeltegn x, slik at X= Mg(<a, Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ α;x[n(a)])>: aêD). Da setter vi per definisjon: V(A)(X) = Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ (Ax)α). Hvis det ikke finnes noen formel α og noe variabeltegn x slik at

X= Mg(<a, Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ α;x[n(a)])>: aêD)

setter vi V(A)(X) = Mg(w: wêC & (Aa)(aêD → wêX(a))).

I denne forbindelse ser man lett, i lys av punkt (4) ovenfor i definisjonen av av sannhetsrelasjonen ⊨, at om XêPt(I)^D og wêC har vi:

wêV(A)(X) ↔ (Aa)(aêD → wêX(a))

(E) Anta <a,X>êDxPt(I). Anta det finnes en formel αêCFm(L(D)) slik at X= Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ α). Da setter vi V(T)(a,X) = Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ T;n(a)(α)) Finnes det ikke noen formel αêFm(L(D))) slik at X= Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ α) setter vi:

V(T)(a,X) = ø

Dermed er V og q* fullstendig definert. Man ser nå lett at V oppfyller alle de krav som er gitt i Definisjon 4.1 i §4. Imidlertid skulle det også være lett å innse at man fra definisjonen av V og ⊨ ovenfor også kan vise at disse relasjonene oppfyller alle de krav som er nevnt i Definisjon 4.2

© 2008 Morten Harboe Rognes

i §4. Dermed har vi vist at M=<D,C,I,q*,V> er en modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn.

Vi har nå fullført konstruksjonen av modellstrukturen M=<D,C,I,q,V> og avbildningen ξ.

Det gjenstår imidlertid å vise at modellstrukturen oppfyller kravet (ii) som er nevnt i satsen. Dette viser vi ved induksjon på lengden av formler i L(D). Egentlig skulle det være enkelt. Man ser sikkert at vi har konstruert V på en slik måte at beviset blir lett å gjennomføre. Nå har vi:

wê ξ;-1"Mg(x: xêPt(CFm(L(D)) & αêx)
↔ (Ey)(w= ξ;-1(y) & yêPt(CFm(L(D)) & αêy)
↔ (Ey)(ξ(w)= y & yêPt(CFm(L(D)) & αêy)
↔ αêξ(w)

Den siste bikondisjonalen holder åpenbart mot høyre. Anta (+) αê ξ(w). Da har vi etter definisjonen av at det finnes y der ξ(w)= y & yêPt(CFm(L(D)). Dette og (+) impliserer åpenbart at (Ey)(ξ(w)= y & yêPt(CFm(L(D)) & αêy).

I lys av disse overveielsene er det klart at det vil være tilstrekkelig å vise for alle αêCFm(L(D)) og wê(I-C) at

(6) (M,w) ⊨ α ↔ αê ξ(w)

Dette vises ved induksjon på lengden av α. Beviset blir desverre langt når det gennomføres detaljert. I tillegg er det også beklagelig vis temmelig trivielt. La oss likevel gjennomføre det for tydelighetens skyld.

Anta wê(I-C) og at α = P(a;1,...,a;n) der a;1,...,a;n er navn i L(D). Da har man

(M,w) ⊨ α ↔ (M,w) ⊨ P(a;1,...,a;n)
↔ <n;-1(a;1),...,n;-1(a;n)>êV(P)

I lys av måten V ble konstruert på har vi at den høyre komponenten i den siste bikondisjonalen ovenfor holder hvis og bare hvis P(a;1,...,a;n)ê ξ(w). Dette i sin tur holder hvis og bare hvis αê ξ(w). Er α =(a=b) for noen navn a og b, eller er α= η(a) for noe navn a, gjennomføres resonnementet på nøyaktig samme måte. Dette viser at (6) holder om er en atomær formel i L

(2) α = ¬β for en eller annen formel β i Cfm(L(D)) og wê(I-C). Da har vi:

(M,w) ⊨ ¬β ↔ wêV(¬)(Mg(w': w'êI & (M,w') ⊨ β))
↔ (¬β)ê ξ(w).

Den siste bikondisjonalen holder i kraft av konstruksjonen av V.

(3) wê(I-C) og α = β→γ der β og γ er formler i CFm(L(D)). Da har vi i kraft av konstruksjonen av V(→):

(M,w) ⊨ (β→γ) ↔ wêV(→)(Mg(w': w'êI & (M,w') ⊨ β),Mg(w': w'êI & (M,w') ⊨ γ))
↔ (β→γ)ê ξ(w)

(4) wê(I-C) og α = (Ax)β for en eller annen formel βêCFm(L(D)). Da har vi i kraft av konstruksjonen av V:

(M,w) ⊨ (Ax)β ↔ wêV(A)(Mg(a: <a, Mg(w': w'êI & (M,w') ⊨ β)>: aêD)
↔ (Ax)βê ξ(w).

(5) wê(I – C) og α= T;a(β) der a er et navn i L(D) og β en formel i CFm(L(D)). Igjen har vi da i kraft av konstruksjonen til V:

(M,w) ⊨ T;a(β) ↔ wêV(T)(i;-1(a), Mg(w': w'êI & (M,w') ⊨ β))
↔ (T;a(β))ê ξ(w).

© 2008 Morten Harboe Rognes

Dermed har vi vist at (ii) holder for alle βêCFm(L(D)) og alle wê(I-C).

Med dette har vi også gitt et detaljert og fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Teorem 7.3: Anta at L er et språk for doxastisk logikk som ikke inneholder konstanter ,og anta at det følgende holder:

(i) D,C er ikke-tomme menger
(ii) ξ: X -(1-1,på)→ Pt(CFm(L(D)) og XΩC=ø
(iii) tê Pt(C)^(DxPt(C))
(iv) qê Pt(D)^C
(v) Er wêC og aêq(w) holder følgende:
  (1) wêt(a,C)
  (2) x,yêPt(C) & wêt(a,x) &wêt(a,y) → wêt(a, xΩy)
  (3) x,yêPt(C) & wêt(a,x) & x Inkl y → wêt(a,y)
  (4) x,yêPt(C) & x= C-y & wêt(a,y) → ¬(wê t(a,x))

Holder disse forutsetningene finnes det en funksjon V slik at man har:

(a) M=<D,C,I,q,V>, der I = XUC, er en Kη-modellstruktur for L
(b) For alle αêCFm(L(D)) gjelder at
  Mg(w: wê(I-C) & (M,w) ⊨ α) = ξ;-1"Mg(x: xêPt(CFm(L(D)) & αêx)
(c) For alle XêPt(I) og aêD holder:
  V(T)(a,X)ΩC = t(a,XΩC)

Bevis: Anta at forutsetningene i satsen holder. Det er nødvendig å konstruere valuasjonsfunksjonen V. Dette kan gjøres nøyaktig som i beviset for foregående sats bortsett fra at V må redefineres for operatoren T. Vi definerer V(T) på følgende måte:

Anta XêPt(I) og aêD. Tilfelle (i): Anta det finnes en formel αêCFm(L(D)) slik at X= Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ α). Da setter vi:

V(T)(a,X)Ω(I-C) = Mg(w: wê(I-C) & T;n(a)α êξ(w))

Tilfelle (ii): Finnes det ikke noen slik formel α setter vi V(T)(a,X)Ω(I-C) = ø
Dermed er V(T) definert om vi begrenser oss til (I-C)

Vi setter V(T)(a,X)ΩC = t(a,XΩC)

Med dette er V(T), og dermed V, fullstendig definert. Man ser at det er trivielt at V oppfyller kravet (c) som er nevnt i satsen.

Beviset for punkt (b) kan gjennomføres ordrett som i beviset for det foregående teorem.

Det eneste som vi derfor må gjøre er at modellstrukturen M=<D,C,I,q,V> oppfyller de kravene som stilles i definisjonen av en Kη-modellstruktur for L gitt at forutsetningene holder. Dette er likefrem:

(a) Anta XêPt(I) & C Inkl X. Fra definisjonen av V har vi om wêC og aêq(w) at V(T)(a,X)ΩC = t(a,XΩC). Siden C Inkl X har vi at XΩC=C. Det følger da ved hjelp av forutsetning (v), punkt (1), at wêt(a,C) og derfor at wêV(T)(a,X). Dette viser at det første kravet til en Kη-modellstruktur er oppfylt.

(b) Anta X;YêPt(I) , wêC, WêV(T)(a,X), wêV(T)(a,Y) og aêq(w). Fra definisjonen av V(T) som vi nå har gitt følger: wêt(a, XΩC) & wêt(a, YΩC). Fra dette og punkt (2) under forutsetning (v) følger wêt(a,XΩYΩC). Anta ZêPt(I) og at ZΩC = XΩYΩC. Da følger at wêt(a,ZΩC). I lys av konstruksjonen av V følger i så fall wêV(T)(a,Z). Dette viser at det andre kravet i definisjonen av en Kη-modellstruktur er oppfylt.

(c) Anta wêV(T)(a,X) & YêPt(I). Anta videre at XΩC Inkl YΩC. Da har vi ved hjelp av definisjonen av V(T) gitt ovenfor at wêt(a,XΩC). Siden vi etter forutsetningen (v) har at t

© 2008 Morten Harboe Rognes

oppfyller kravet (3), følger da wêt(a,YΩC). Ved hjelp av definisjonen av V har vi da wêV(T)(a,Y) som er det vi ønsker. Dermed har vi godtgjort at M også oppfyller det tredje kravet som stilles til en Kη-modellstruktur.

(d) Anta wêV(T)(a,Y) og at XΩC = C-(YΩC) der X;YêPt(I). Siden wêC har vi da at wêt(a,YΩC). Fra forutsetning (v), punkt (4), følger da ¬(wêt(a,XΩC)). Dette impliserer i lys av definisjonen av V at ¬(wêV(T)(a,X)). Dette viser at M også oppfyller det fjerde kravet som stilles til en Kη-modellstruktur.

Vi har nå vist at M oppfyller alle de kravene som nevnes i satsen. Dette avslutter beviset. **QED.**

§8 Modellteori basert på finstrukturerte utsagn

I dette avsnittet skal vi betrakte en annen type modellteori for doxastiske språk av den typen vi definerte i §2. Den typen modellstrukturer som ble introdusert i §4 var basert på unormale verdener, den typen modellstrukturer som vi introduserer i denne paragrafen er snarere basert på noe vi skal kalle finstrukturerte utsagn.
Anta L er et språk for doxastiske logikk. Da definerer vi hva som menes med en modellstruktur for L basert på finstrukturerte utsagn ved den følgende definisjon:

Definisjon 8.1 La L være et språk for doxastisk logikk. Med *en modellstruktur M basert på finstrukturerte utsagn for L* forstår vi en struktur M=< D,I,U,σ,φ,f> der de enkelte komponentene oppfyller de følgende krav:

(i) D, I og U er ikke-tomme mengder

(ii) σ : U -(på) -> Pt(I), mao. er σ en funksjon som avbilder ethvert element U på et element i Pt(I) og dessuten slik at dersom x er med i Pt(I) så finnes det et element uêU slik at σ(u) = x.

(iii) φ er en funksjon som oppfyller de følgende krav:

(a) Den tilordner ethvert n-ært ikke logisk predikat en funkjon i mengden (Pt(D^n)) ^I. Dette innebærer at dersom P er et n-ært predikat i L så har vi at φ(P) : I → Pt(D^n).

(b) Vi krever at φ(=) er funksjonen som til enhver mulig verden tilordner identitetsrelasjonen over D, ie Mg(<x,y>: x,yêD & x=y).

(c) Videre skal φ(η) være en funksjon i mengden (Pt(D))^I.

(d) Vi krever også at φ tilordner alle konstantene i L konstantfunksjoner i D^I. Dette innebærer at dersom e er en konstant i L og wêI så er φ(e)(w)êD og er w;1,w;2êI så har man alltid at φ(e)(w;1) = φ(e)(w;2).

(e) Vi krever at φ(T) ê (Pt(Dx U))^I. Dette innebærer at dersom wêI, så har vi at φ(T)(w)êPt(DxU).

(iv) f: CFm(L(D)) → U. Vi krever dessuten det følgende av f: Anta α er en formel i L som inneholder konstanten e. Anta (Ew)(wêI & φ(e)(w) = x). Anta c er navnet på elementet x i D eller en annen konstant med samme referanse som e. Anta β er nøyaktig som α bortsett fra at vi har erstattet en eller flere forekomster av e i α med c. Da kreves det at f(α) = f(β). Dessuten krever vi, om vi begrenser oss til de formlene i CFm(L(D)) som bare inneholder navn, og som ikke inneholder noen av konstantene i L, la oss kalle denne mengden X, at f skal avbilde X en-entydig inn i U.

© 2008 Morten Harboe Rognes

Er M=<D,I,U,σ,φ,f> er modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn for det doxastiske språket L, kaller vi D for mengden av de mulige individene i modellstrukturen M, I for mengden av de mulige verdenene i modellstrukturen og U for mengden av utsagnene i strukturen. σ kaller vi for sannhetsfunksjonen og φ for valuasjonsfunksjonen. Vi skal kalle f for "uttrykksfunksjonen". Er nemlig α en lukket formel i L(D) kunne man si at f(α) representerer det utsagnet formelen α uttrykker i modellstrukturen. Vi skal gi en mer utførlig intuitiv omtale av denne typen modellstrukturer i neste avsnitt, §8.1 og nøyer oss med disse bemerkningene her.

Vi har nå definert hva vi mener med en modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn for språket L. Det neste som må gjøres er å definere hva som menes med et en lukket formel i L(D) er sann i verdenen w i en slik modell M. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 8.2 Anta L er et språk for doxastisk logikk og at M=<D,I,U,σ,φ,f> er en modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn for L. Anta αêCFm(L(D)). Da definerer vi hva som menes med at α er sann i strukturen M relativt til verdenen w, (M,w) ⊨ α, induktivt på lengden av α slik:

(i) Er P et n-ært predikat i L og a;1,...,a;n enten konstanter eller navn i L(D) setter vi: (M,w) ⊨ P(a;1,...,a;n) ↔ <v(a;1),....,v(a;n)>êφ(P)(w) der vi har for i=1,...,n at v(a;1) = φ(a;i)(w) om a;i er en konstant i L og v(a;i) = n;-1(a;i) om a;i er et navn.

(ii) Er α = η(a) der a enten er en konstant eller et navn i L(D) setter vi:
(M,w) ⊨ η(a) ↔ v(a)êφ(η)(w) der v(a) = φ(a)(w) om a er en konstant og v(a) = n;-1(a) om a er et navn.

(iii) Er α = (a;1=a;2) der a;1 og a;2 enten er konstanter eller navn i L(D) setter vi:
(M,w) ⊨ (a;1 = a;2) ↔ <v(a;1), v(a;2)> êφ(=)(w) der v(a;i) = φ(a;i)(w) om a;i er en konstant og v(a;i)= n;-1(a;i) om a;i er et navn. (i=1,2)

(iv) Er α = ¬β setter vi:
(M,w) ⊨ α ↔ ¬((M,w) ⊨ β)

(v) Er α = β→γ setter vi
(M,w) ⊨ α ↔ ((M,w) ⊨ β → (M,w) ⊨ γ)

(vi) Er α = (Ax)β setter vi:
(M,w) ⊨ α ↔ (Aa)(aêD → (M,w) ⊨ β;x[n(a)])

(vii) Er α = T;a(β) der a enten er en konstant eller et navn i L(D) setter vi:
(M,w) ⊨ α ↔ <v(a), f(β)> êφ(T)(w). Her er v(a) = φ(a)(w) om a er en konstant og v(a)= n;-1(a) om a er et navn.

Vi har ovenfor definert hva som menes med en modellstruktur. Innenfor klassen av disse modellstrukturene avgrenser vi dem som er normale:

Definisjon 8.3 Anta L er et språk for doxastisk logikk. La M=<D;I,U,σ,φ,f> være en modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn for L. Da kaller vi M for *en normal modellstruktur* hvis og bare hvis vi har for alle wêI og alle αêCFm(L(D)) at følgende holder:
(M,w) ⊨ α ↔ wêσ(f(α))

Vi skal innføre ytterligere noen begreper i forbindelse med denne typen modellstrukturer. Anta M= <D,I,U,σ,φ,f> er en modellstruktur for L basert på finstrukturerte utsagn. Somnevnt representerer da elementene i mengden U utsagnene i strukturen. I representerer de mulige verdenene. Funksjonen σ tilordner hvert utsagn i U en mengde med mulige verdener. Er xêU er

© 2008 Morten Harboe Rognes

det meningen at $\sigma(x)$ representerer mengden av alle de verdenene hvor utsagnet x er sant, kort sagt det vi kunne kalle sannhetsmengden til utsagnet x. Som man ser er det ikke lagt noen krav på modellstrukturene som tilsier at to utsagn med den samme sannhetsmengde skal være identiske. Anta Δ Inkl U. Vi sier da at denne utsagns mengden Δ er *konsistent* med hensyn på M om vi har at snittet av alle de diverse sannhetsmengdene $\sigma(x)$ ettersom x gjennomløper Δ er en ikke-tom mengde. Formulert ved hjelp av symboler har man altså at Δ er konsistent hvis og bare $SN(Mg(\sigma(x): x\hat{e}\Delta) <> \emptyset$.

Er x og y to utsagn, mao. er $x,y\hat{e}U$ sier vi at x logisk sett impliserer y dersom sannhetsmengden til x er inkludert i sannhetsmengden til y, det vil si hvis og bare hvis $\sigma(x)$ Inkl $\sigma(y)$. Som man skjønner vil det da ikke finnes noen logisk mulig verden, noe element i I, hvor man har at utsagnet x er sant mens utsagnet y er usant. Vi sier at *en utsagnsmengde Δ Inkl U er deduktivt lukket i modellstrukturen M* hvis og bare hvis vi har at dersom x er med i Δ, og y er et utsagn som logisk sett er implisert av x, så er også y med i Δ. I symboler kan dette uttrykkes slik:

$$(Ax)(x\hat{e}\Delta \rightarrow (Ay)(y\hat{e}U \,\&\, \sigma(x) \text{ Inkl } \sigma(y) \rightarrow y\hat{e}\Delta))$$

Et utsagn x i modellstrukturen M kalles for et nødvendig sant utsagn, vi vil også tillate oss å kalle utsagnet for en logisk sannhet, dersom det er sant i alle logisk mulige verdener. Dette innebærer at et utsagn x er et logisk nødvendig utsagn i modellstrukturen M hvis og bare hvis vi har at $\sigma(x) = I$. Er Δ Inkl U sier vi at *Δ inneholder alle logisk nødvendige utsagn* hvis og bare hvis $(Ax)(x\hat{e}U \,\&\, \sigma(x)= I \rightarrow x\hat{e}\Delta)$

En utsagnsmengde Δ Inkl U sies å være *konjunktivt lukket i modellstrukturen M* om den følgende betingelse er oppfylt:

$$(Ax)(Ay)(x,y\hat{e}\Delta \rightarrow (Az)(z\hat{e}U \,\&\, \sigma(z) = \sigma(x)\Omega\sigma(y) \rightarrow z\hat{e}\Delta))$$

I denne forbindelse er det viktig å huske på følgende. σ er en funksjon som avbilder U på Pt(I). Den er ikke en-entydig. Er derfor x og y utsagn så er naturligvis snittet av sannhetsmengdene til x og y entydig bestemt. Men det kan være flere utsagn som har dette snittet som sin sannhetsmengde. For at Δ skal være konjunktivt lukket er det derfor nødvendig at alle de utsagnene z som har har som sannhetsmengde $\sigma(x)\Omega\sigma(y)$ må være med i Δ om x og y er det.

En ting er at en utsagnsmengde Δ er konjunktivt lukket. Det garanterer bare at dersom et par av utsagn x,y begge er med i Δ så er ethvert utsagn hvis sannhetsmengde er identisk med snittet av sannhetsmengdene til x og y med i Δ. Men vi har ikke derfor noen garanti for at dersom X er en uendelig delmengde av Δ så er ethvert utsagn hvis sannhetsmengde er identisk med snittet av alle sannhetsmengdene til diverse utsagn i X med i Δ. Hvis dette siste er tilfelle, det vil si hvis vi har at følgende holder:

$$\Delta \text{ Inkl } U \,\&\, (AX)(X\hat{e}Pt(U) \,\&\, X \text{ Inkl } \Delta \,\&\, X<>\emptyset \rightarrow (Ay)(y\hat{e}U \,\&\sigma(y) = SN(\, Mg(\sigma(x): x\hat{e}X)) \rightarrow y\hat{e}\Delta)),$$

sier vi at *Δ er strengt konjunktivt lukket i modellstrukturen M.*

På samme måte som vi §4 avgrenset visse modellstrukturklasser som korresponderte til systemene, $K\eta^-$, $K\eta$ og $K\eta^+$ kan vi nå gjøre det samme.

© 2008 Morten Harboe Rognes

Definisjon 8.4 Anta L er et språk for doxastisk logikk. La M=<D,I,U,σ,φ,f> være en normal modellstruktur for L. Vi kaller da M for *en (Kη-)-modellstruktur for L* hvis og bare hvis M oppfyller det følgende krav: Er wêI og xêφ(η)(w) krever vi at utsagnsmengden Mg(u : uêU & <x,u>êφ(T)(w)) inneholder alle logisk nødvendig utsagn i M, er konjunktivt lukket og er deduktivt lukket i M.

Definisjon 8.5 Anta L er et språk for doxastisk logikk. La M=<D,I,U,σ,φ,f> være en normal modellstruktur for L. Vi kaller da M for *en Kη-modellstruktur for L* hvis og bare hvis M oppfyller det følgende krav: Er wêI og xêφ(η)(w) krever vi at utsagnsmengden Mg(u : uêU & <x,u>êφ(T)(w)) er konsistent i M, inneholder alle logisk nødvendig utsagn i M, er konjunktivt lukket og er deduktivt lukket i M.

Tilslutt defineres hva som menes med en Kη+-modellstruktur for L:

Definisjon 8.6 Anta L er et språk for doxastisk logikk. La M=<D,I,U,σ,φ,f> være en normal modellstruktur for L. Vi kaller da M for *en Kη+ -modellstruktur for L* hvis og bare hvis M oppfyller det følgende krav: Er wêI og xêφ(η)(w) krever vi at utsagnsmengden Mg(u : uêU & <x,u>êφ(T)(w)) er konsistent i M, inneholder alle logisk nødvendig utsagn i M, er strengt konjunktivt lukket og er deduktivt lukket i M.

Vi definerer gyldighet i en modell på samme måte som tidligere. Er α en formel i L sier vi at den er gyldig i en modellstrukturbasert på finstrukturerte utsagn hvis og bare enhver M-instans av α er sann i enhver logisk mulig verden i modellstrukturen M. En formel α er Kη- (Kη, Kη+) - gyldig hvis og bare hvis den er gyldig i enhver Kη- (Kη, Kη+) -modellstruktur for L.

La oss bemerke at det er ytterligere en klasse av slike normale modellstrukturer som er av en viss interesse. Det dreier seg om de Kη- -modellstrukturene basert på finstrukturerte utsagn som ikke bare oppfyller konjunksjonskravet, men også det sterke konjunksjonskravet. Når det gjelder modellstrukturer basert på unormale verdner kan man også her betrakte de Kη- -modellstrukturene som oppfyller dette sterke konjunksjonskrav.

Man kan spørre om de gyldighetsbegrepene vi her har fastsatt faller sammen med de korresponderende gyldighetsbegrepene som ble definert i §4. Vi skal komme tilbake til spørsmålet i §9.

§8.1 Intuitiv redegjørelse for modellstrukturene basert på finstrukturerte utsagn

Som man så i forrige paragraf er en modellstruktur for L basert på finstrukturerte en struktur av typen M = <D,I,U,σ,φ,f> som oppfyller de krav som ble nevnt i Definisjon 8.1.

Hensikten med dette avsnittet er å gjøre mer utførlig rede for de enkelte komponentene i en slik struktur.

Når det gjelder D skal dette være en ikke-tom mengde. Denne representerer mengden av alle de objektene det kvantifiseres over. Denne komponenten har derfor nøyaktig den samme funksjon som den tilsvarende komponenten i modellstrukturer for L basert på unormale verdener. Det samme gjelder komponenten I som i forbindelse med den type modellstrukturer vi arbeider med her representerer mengden av alle logisk mulige verdener. Komponenten svarer derfor til den mengden som ble betegnet med C i forbindelse med modellstrukturer basert på unormale verdener. Når det gjelder de strukturene som vi kommenterer her er det intet som svarer til det vi omtalte som unormale verdener i §4 og §4.1. I alle de verdenene som inngår i I

© 2008 Morten Harboe Rognes

vil derfor predikatene, de setningslogiske konnektivene og kvantorene bli intepretert og evaluert på vanlig måte.

Det nye ved strukturene som ble introdusert i forrige paragraf er komponentene U og σ, der U er en ikke-tom mengde og σ en funksjon. U representerer en art utsagn. Vi skal tillate oss å kalle elementene i U for de "finstrukturerte" utsagnene i modellstrukturen M. Poenget er at de skal representere utsagn som uttrykkes av formlene i L(D), men som er finere individuert en normalt. I en betydning av ordet "utsagn" vil to lukkede setninger i L uttrykke det samme utsagn om de logisk sett er ekvivalente. I denne forstand vil for eksempel en setning α og en setning som ¬(¬(α)) uttrykke det samme utsagn. Det samme gjelder et hvilket som helst par av nødvendig sanne matematiske utsagn. Hvis man derimot har det i tankene som her antydes ved "finstrukturerte utsagn" behøver det ikke nødvendigvis være tilfelle at to logisk ekvivalente setninger uttrykker det samme utsagn. Det er mulig at α og ¬¬α kunne uttrykke det samme finstrukturerte utsagn, men for eksempel samtidig at α og ¬¬¬¬α ikke gjør det. Uansett hvordan man individuerer utsagn av denne siste typen er det meningen at U kun skal inneholde slike utsagn.

Hvert element i U regnes som enten sant eller usant i enhververden i w. Er xêU er σ(x) mengden av alle de verdenene hvor x er sann og I -σ(x) mengden av nøyaktig de verdenene hvor x er usant. Vi krever derfor at σ skal være en funksjon som avbilder U på Pt(I). Dette innebærer at det til enhver delmengde x av I vil finnes et utsagn uêU slik at σ(u)=x. Er u et finstrukturert utsagn kaller vi σ(u) for *sannhetsmengden* til u. Når det gjelder U er intet sagt om hvor mange utsagn som skal ha den samme sannhetsmengde. Vi skal senere si noe om dette, men så langt er det i og for seg ikke noe som utelukker at man kan postulere at Mg(u: ueU & σ(u) =x) kun inneholder ett eneste element for hver eneste mengde xêPt(I). I så tilfelle vil det være en en-entydig korrespondanse mellom det vi her kaller finstrukturerte utsagn og delmengder av I.

Det er noen forhold i forbindelse med finstrukturerte utsagn som bør nevnes før vi går videre. Er x, y to finstrukturerte utsagn sier vi at x logisk sett impliserer y, eller at y er en logisk konsekvens av x, hvis og bare hvis sannhetsmengden til x er inkludert i sannhetsmengden til y, med andre ord dersom σ(x) Inkl σ(y).

Er x,y finstrukturerte utsagn er det ikke entydig bestemt hva som skal kalles for konjunksjonen av dem. Vi sier imidlertid at et utsagn z er en konjunksjon av utsagnene x og y hvis og bare hvis σ(z) = σ(x)Ωσ(y), det vil si dersom sannhetsmengden til z er identisk med snittet av sannhetsmengdene til x og y. På tilsvarende vis går vi frem dersom Γ er en mengde med finstrukturerte utsagn, da sies det finstrukturerte utsagnet z å være en konjunksjon av alle utsagnene i Γ hvis og bare hvis vi har at σ(z) = SN(Mg(σ(y): yêΓ)). Dette innebærer at z er en konjunksjon av elementene i Γ hvis og bare hvis sannhetsmengden til z er identisk med snittet av alle sannhetsmengdene til elementene i z.

Når det gjelder negasjon er fremgangsmåten den samme. Er x et finstrukturert utsagn i U finnes det ikke nødvendigvis ett og bare ett utsagn som kan kalles negasjonen av x. Vi sier derfor at y er en negasjon av x hvis og bare hvis sannhetsmengden til y er komplementet til sannhetsmengden til x med hensyn på I, dvs. dersom σ(y) = I - σ(x).

Et finstrukturert utsagn kalles nødvendig sant om sannhetsmengden til det er identisk med I, mengden av alle logisk mulige verdener.

Som tilfellet var med modellstrukturer basert på unormale verdener kan vi nå på samme vis, i forbindelse med den typen modeller vi arbeider med her, definere hva som menes med at en mengde med finstrukturerte utsagn Γ er logisk sett rasjonelt organisert. Som tidligere fastsetter vi at de følgende fire betingelser skal være nødvendige og tilstrekkelige:

© 2008 Morten Harboe Rognes

For det første inneholder Γ ethvert finstrukturert utsagn som er nødvendig sant. For det andre er Γ lukket under logisk konsekvens. For det tredje er Γ konjunktivt lukket. Endelig kreves det at dersom x er et element i Γ så skal intet finstrukturert utsagn som er en negasjon av x være med i Γ.

Siden vi nå har sett på de fire første komponentene i en modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn er det naturlig å se på de to siste. Vi tar først for oss funksjonen φ.

φ er en funksjon som tilordner de predikatene, de setningslogiske konnektivene og kvantorene i L visse verdier. La oss først se på predikatene.

Er P et ikke-logisk n-ært predikat i L ser man fra Definisjon 8.1 at φ(P)ê (Pt(D^n))^I. Dette innebærer at φ(P)(w), der wêI, er en mengde av n-tupler av mulige individer hentet fra D. φ(P)(w) er med andre ord ekstensjonen til predikatet w i verdenen w. Når det gjelder en-plass predikatet η ser man fra Definisjon 8.1 at denne definisjonen ikke legger noen spesielle restriksjoner på φ(η) bortsett fra at ekstensjonen i hver verden skal være en mengde. Hensikten er imidlertid at φ(η)(w), der wêI, skal representere mengden av alle de individene i verdenen w hvor trosfeltet logisk sett er rasjonelt organisert.

Når det gjelder φ(=) kreves det for alle x,yêD, og alle wêI, at <x,y>êφ(=)(w) hvis og bare hvis x=y. Dette innebærer at ekstensjonen til identitetspredikatet er den samme i enhver verden og at denne ekstensjon er identisk med identitetsrelasjonen begrenset til D. Det virker naturligvis som om dette er et fornuftig krav. Er to gjenstander x og y identiske er det vanskelig å skjønne hvordan de skal kunne bli forskjellige og derfor hvordan det, til tross for at de er identiske, skal være mulig at de er forskjellige. Rimeligvis bør det samme gjelde om to gjenstander x og y er forskjellige. Hvordan kan det da være logisk mulig at de er identiske. Ved nærmere ettertanke virker det derfor ytterst vanskelig å komme å tilbakevise den påstand at aksiomskjemaene E1 og E2 er nødvendige sannheter.

φ tilordner også operatoren T en viss funksjon, nemlig en funksjon i mengden Pt(DxU)^I. Dette innebærer at φ(T) : I → Pt(DxU), noe som i sin tur impliserer at dersom wêI har man at φ(T)(w)êPt(DxU), dvs. φ(T)(w) Inkl DxU. Har man derfor at <x,u>êDxU og at <x,u>êφ(T)(w) for noen wêI, innebærer dette at u er et utsagn som x tror er tilfelle i verdenen w. Det vi tidligere har kalt *trosfeltet til et individ x i verdenen w* vil i den type strukturer som vi ser på her være Mg(u: uêU & <x,u>êφ(T)(w)). Som vi har nevnt tidligere sier vi at dette trosfelt er rasjonelt organisert om det utgjør en logisk sett rasjonelt organisert mengde med finstrukturerte individer. I modellstrukturene basert på finstrukturerte utsagn krever vi at dersom xêφ(η)(w), for en eller annen verden wêI, så skal trosfeltet til x være rasjonelt organisert i verdenen w. Modellstrukturer som oppfyller dette kravet er som man ser Kη-modellstrukturene basert på finstrukturerte utsagn. Hvis man sløyfer kravet om konsistens, dvs. det kravet som krever at et utsagn og en negasjon av dette utsagn ikke samtidig kan være med i en logisk sett rasjonelt organisert utsagnsmengde, får man Kη- -modellstrukturer. Opprettholder man alle kravene og krever i tillegg at trosfeltet til x i verdenen w skal være strengt konjunktivt lukket om xêφ(η)(w) får man den typen av strukturer som vi har kalt Kη+ - modellstrukturer.[6]

Når det gjelder konstantene i L tilordner φ dem konstantfunksjoner i D^I. Er derfor e en konstant har vi at φ(e)(w) = φ(e)(w')êD for alle w,w'êI. Man kunne naturligvis i stedet ha latt φ tilordne konstantene direkte elementer i D. Da må man imidlertid endre noen av valuasjonsreglene i Definisjon 8.2. Vi har valgt det første alternativet. Det er imidlertid mulig at det siste alternativet er noe enklere.

Vi skal nå avslutningsvis se nærmere på den siste komponenten i en modellstruktur M=<D,I,U,σ,φ,f>, nemlig funksjonen f. L(D) er, som vi har forklart tidligere, språket L utvidet

[6] Man kan konsultere Definisjon8.4 - 8.6 i forrige paragraf.

© 2008 Morten Harboe Rognes

med navn på alle elementene i D. Fra Definisjon 8.1 fremgår det at f tilordner alle de lukkede formlene i L(D), dvs. alle elementene i CFm(L(D)) finstrukturerte utsagn i mengden U. Man kan si uformelt at dersom αêCFm(L(D)) er f(α) det finstrukturerte utsagnet som α uttrykker i den modellstrukturen det ver tale om.

Det er imidlertid visse restriksjoner som er lagt på funksjonen f når det gjelder den type modellstrukturer som vi betrakter her. Den første restriksjonen er denne: Anta α,βêCFm(L(D)) og at β er som α bortsett fra at vi har ersattet en eller flere forekomster av en konstant e i α med en annen konstant eller et navn som har den samme referanse. Da kreves det at f(α) = f(β). Vi trenger dette kravet fordi vi ønsker at"Leibniz lov", dvs. formelen
x= y → F(x) → F(y) skal holde uinskrenket. Det bør den også gjøre om x forekommer fri i β i en formel av typen T;c(β). Men ser man på valusjonsreglene i Definisjon 8.2 er det umulig å få til dette om man ikke legger et slikt krav på funksjonen f. Hvis vi bare legger dette kravet på f får man en relativt rik klasse med modellstrukturer. Imidlertid vil vi da ikke uten videre kunne vise at man til enhver modellstruktur for L basert på finstrukturerte utsagn kan konstruere en modellstruktur basert på unormale verdener (eller omvendt) som verifiserer de samme formlene. Av denne grunn har vi føyd til ytterligere et krav: Anta Q er mengden av alle de lukkede formler i L(D) som ikke inneholder noen av de konstantene som er med i L. Hvis en formel i Q inneholder noe som ligner konstanter dreier det seg altrså om navn. Da krever vi at f skal avbilde alle elementene i Q en-entydig inn i U. Dette innebærer at to distinkte formler i Q nødvendigvis uttrykker forskjellige finstrukturerte utsagn. I sin tur vil dette si at mengden av finstrukturerte utsagn er nøyaktig like fint strukturert som mengden av formler i Q.

I §8 definerte vi presist, dersom M=<D,I,U,σ,φ,f> var en modellstruktur for L basert på finstrukturerte utsagn, hva som menes med at en lukket formel α i L(D) er sann i verdenen w i modellestrukturen M. Med andre ord ble det gitt en presis definisjon av uttrykket "(M,w) ⊨ α". Saken er nå denne: Dersom f tilordner enhver formel α i L et finstrukturert utsagn, f(α), så bør sannhetsmengden til dette utsagnet f(α), ie σ(f(α)), være den samme som mengden av alle de verdnene i modellen M hvor formelen α er sann. Med andre ord virker det naturlig å kreve at σ(f(α)) = Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ α). Oppfyller modellstrukturen M dette kravet kaller vi den for normal. Det bør imidlertid noteres at det ikke er noen helt opplagt ting at det finnes normale modellstrukturerav denne type der φ(η)(w) er ikke tom for visse wêI. Det som eventuelt gjør det vanskelig å spesifisere slike modeller er nettopp dette kravet om normalitet.

§9 Bevis for at modelstrukturer basert på finstrukturerte utsagn er ekvivalente med modelstrukturer basert på unormale verdener.

Vi skal i denne paragrafen bevise to teoremer som viser at modellstrukturer basert på finstrukturerte utsagn i en viss forstand er ekvivalente med modellstrukturer basert på unormale verdener. Mer presist skal vi bevise de følgende to teoremer. Det første er:

Teorem 9.1 Anta L er et språk for doxastisk logikk. Anta M=<D,I,U σ,φ,f> er en Kη+ -modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn for L som oppfyller det strenge konjunksjonskravet. Da finnes det en
Kη+- modellstruktur M* = <D*,C*,I*,q*,V*> basert på unormale verdener som oppfyller som oppfyller det samme krav,s samt de følgende tre krav:

(i) C* = I og D*=D

(ii) For alle wêI og for alle αêCFm(L(D)) gjelder:

© 2008 Morten Harboe Rognes

$(M^*,w) \models \alpha \leftrightarrow (M,w) \models \alpha$

(iii) La Q være mengden av alle de lukkede formler i L(D) som ikke innholder noen konstanter hentet fra L. Da oppfyller M* det følgende krav:

$(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Q \ \& \ \alpha \neq \beta \rightarrow$
$Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M^*,w) \models \alpha) \neq Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M^*,w) \models \beta))$

Man ser lett at man fra denne satsen kan slutte at dersom en formel α i L er gyldig i alle modellstrukturer for L basert på unormale verdener så er også formlen gyldig i alle modellstrukturer for L basert på finstrukturerte utsagn.

Vår andre teorem i denne paragrafen er det følgende

Teorem 9.2 Anta L er et språk for doxastisk logikk. Anta M=<D,C,I,q,V> er en Kη+-modellstruktur for L basert på unormale verdener samt det strenge konjunksjonskravet. La Q være mengden av alle de formler CFm(L(D)) som ikke inneholder konstanter fra L. Anta M oppfyller kravet:

(+) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Q \ \& \ \alpha \neq \beta \rightarrow$
$Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \alpha) \neq Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \beta))$

Da finnes det en Kη+-modellstruktur $M^* = <D^*,I^*,U^*,\sigma^*,\varphi^*,f^*>$ basert på finstrukturerte utsagn for L som også oppfyller det strenge konjunksjonskravet og der vi har:

(i) $D^* = D$ og $I^* = C$

(ii) Er $w \hat{e} C$ og $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$ gjelder:
$(M^*,w) \models \alpha \leftrightarrow (M,w) \models \alpha$

Man ser at dette teoremet er den eksakte omvending av det foregående teorem.

Vi skal gi bevis for disse to teoremene i den rekkefølgen vi har nevnt dem.

Bevis for Teorem 9.1: Anta (1) at L er et språk for doxastisk logikk og anta (2) at $M=<D,I,U \sigma,\varphi,f>$ er en Kη+ -modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn for L. Vi skal under disse forutsetninger definere en Kη+- modellstruktur $M^* = <D^*,C^*,I^*,q^*,V^*>$ basert på unormale verdener som oppfyller de kravene som er nevnt i satsen. Det er da nødvendig å definere de ymse komponentene D^*,C^*,I^*, q^* og V^* som inngår i M^*. Vi definerer først D^* ved å sette:

(3) $D^*=D$

Dernest definerer vi mengden av de klassiske verdenene i M^*, C^*, ved å sette:

(4) $C^*=I$

Vi må imidlertid definere mengden av de unormale verdenene i M^*. Dette gjør vi ved å sette:

(5) $I^* = I \cup Pt(U)$ i det vi forutsetter at potensmengden til U og I er disjunkte. Det følger da at vi har at (5.1) $I^* - C^* = Pt(U)$. Siden elementene i I^*-C^*, som vi har nevnt tidligere, representerer de unormale verdnene i M^* ser man fra (5.1) at vi identifiserer alle disse unormale entitetene med delmengder av utsagn.

Den neste oppgaven vi tar for oss er å definere funksjonen V^* slik at den oppfyller kravene i Definisjon 4.1 og Definisjon 4.2. Vi skal først definere $V^*(u)$ når u er en konstant i L, videre når A er et n-ært predikat i L og når A er η-predikatet og identitetspredikatet. Vi definerer først V^* for konstanter i det vi setter

© 2008 Morten Harboe Rognes

(6.1) V*(c) = φ(c)(w) der w er en eller annen mulig verden i I om c er en konstant i L. I denne forbindelse må man huske på at φ i modellstrukturen M tilordner enhver konstant en konstantfunksjon i mengden D^I og derfor at φ(c)(w) = φ(c)(w') êD for alle mulige elementer w,w' som er med i I. (Jmf. Definisjon 8.2) Gitt dette ser man at V*(c) er veldefinert i kraft av definisjonen (6.1).

Dernest må vi definere V*(P) om P er et n-ært predikat i L på en slik måte at V*(P) oppfyller de krav som er nevnt i Definisjon 4.1. Vi gjør dette slik:

(6.2) V*(P)(w) = φ(P)(w) om wêC*=I.

(6.3) V*(P)(w) = Mg(<a;1,...,a;n>: a;1,..,a;nêD*&
f(P(n(a;1),....,n(a;n)))êw om wê(I*-C*)

Man ser fra disse to stipulasjonene at dersom w er en klassisk verden, det vil si når wêC*, vil V*(P)(w) være en delmengde av D^n = D*^n. Når det derimot gjelder de unormale verdenene i M* har vi nå identifisert dem med de diverse elementene i Pt(U). Vi lar derfor ekstensjonen til et predikat P i en slik unormal verden w være mengden av alle de n-tupler <a;1,...,a;n> der vi har at utsagnet som f tilordner P(n(a;1),..,n(a;n)) er med i wêPt(U).

Når V*(P) er definert som ved (6.2) og (6.3) ser man at V*(P)ê Pt(D*^n)^I*. Dette er hva som kreves.

Vi definerer V*(=) på en analog måte:

(6.4) V*(=)(w) = φ(=)(w) om wêC* = I

(6.5) V*(=)(w) = Mg(<a;1,a;2>: a;1, a;2êD* & f(n(a;1) = n(a;2))êw) om wêI*- C*.

Man ser da lett at V*(=)ê Pt(D*^2)^I*. Dessuten ser man ganske lett at V*(=) oppfyller kravet som er nevnt under punkt (iv) i Definisjon 4.1. Vi har om wêC* og x,yêD* at

<x,y>êV*(=)(w) ↔ <x,y>êφ(=)(w) ↔ x=y. i lys av punkt (iii b) i Definisjon 8.1.

Før vi går videre, og definerer V*(η), er det beleilig å komponenten q* i M*. q* skal være en funksjon som til enhver verden wêI* tilordner w en mengde med mulige individer i D*.
Vi definerer:

(7.1) q*(w) = φ(η)(w) om wêC* = I

(7.2) q*(w) = Mg(a: aêD* & f(η(n(a)))êw) om wê (I* - C*)

Gitt denne definisjonen av q* er det lett å definere V(η) Vi setter simpelthen:

(7.3) V(η) = q*

På basis av denne definisjonen ser man lett at V(η) oppfyller de krav som er stilt i Definisjon 4.1.

Så langt har vi definert komponentene D*,C*,I*,q* . Dessuten har vi definert funksjonen V*(u) om u er en konstant, et n-ært predikat, predikatet "=" eller predikatet "η". For å fullføre konstruksjonen av modellstrukturen M* må vi imidlertid også definere V*(¬), V*(→), V*(A) og V*(T). Først når dette er gjort slik at alle kravene i Definisjon 4.1 og Definisjon 4.2 er oppfylt er konstruksjonen av M* fullstendig.

Vi skal nå gjøre det følgende. Først skal vi definere en sannhetsrelasjon "(M*,w)╞α" ved induksjon på lengden av de diverse αêCFm(L(D)) og for alle wêI*. Når dette er gjort skal vi så fullføre definisjonen av V* og verifisere at modellstrukturen M* oppfyller alle kravene i Definisjon 4.1 og at den sannhetsrelasjonen vi har definert også oppfyller kravene i Definisjon 4.2. Vi definerer først: (M*,w) ╞ α ved induksjon på lengden av α på følgende vis:

Anta P er et-nært predikat i L og at c;1,...,c;n er navn eller konstanter i L(D). Da setter vi:

(8) (M*,w) ╞ P(c;1,...,c;n) ↔ <v(c;1),....,v(c;n)>ê V*(P)(w) for alle wêI*

I denne definisjonen merker vi oss at v(c;i) = V*(c;i) om c;i er en konstant i L og at v(c;i)= n;-1(c;i) om c;i er et navn i L(D). (i=1,...,n).

På tilsvarende vis går vi frem ved predikatene "=" og "η" i det vi per definisjon setter:

© 2008 Morten Harboe Rognes

(8.1) $(M^*,w) \models c;1=c;2 \leftrightarrow \langle v(c;1),v(c;2)\rangle \hat{e} V^*(=)(w)$ for alle $w \hat{e} I^*$
(8.2) $(M^*,w) \models \eta(c) \leftrightarrow v(c) \hat{e} V^*(\eta)(w)$ for alle $w \hat{e} I^*$

I (8.1) og (8.2) betyr "v(c;i)" naturligvis det samme som i forbindelse med (8). I lys av disse stipulasjonene er $(M^*,w) \models \alpha$ fiksert for alle atomære formler α i CFm(L(D)).

(a) Er $\alpha = \neg\beta$ for en eller annen formel $\beta \hat{e} CFm(L(D))$ setter vi
(9.1) $(M^*,w) \models \neg\beta \leftrightarrow \neg((M^*,w) \models \beta)$ om $w \hat{e} C^*$
(9.2) $(M^*,w) \models \neg\beta \leftrightarrow f(\neg\beta) \hat{e} w$ dersom $w \hat{e} (I^*-C^*)$

(b) Anta $\alpha = (\beta \rightarrow \gamma)$ der $(\beta \rightarrow \gamma)$ er en formel i CFm(L(D)). Da setter vi:
(10.1) $(M^*,w) \models \beta \rightarrow \gamma \leftrightarrow ((M^*,w) \models \beta \rightarrow (M^*,w) \models \gamma)$ om $w \hat{e} C^* = I$
(10.2) $(M^*,w) \models \beta \rightarrow \gamma \leftrightarrow f(\beta \rightarrow \gamma) \hat{e} w$ om $w \hat{e} (I^* - C^*)$

(c) Anta $\alpha = (Ax)\beta$ der $(Ax)\beta$ er en lukket formel i L(D). Da setter vi:
(11.1) $(M^*,w) \models (Ax)\beta \leftrightarrow (Aa)(a \hat{e} D^* \rightarrow (M^*,w) \models \beta;x[n(a)]$ om $w \hat{e} C^* = I$
(11.2) $(M^*,w) \models (Ax)\beta \leftrightarrow f((Ax)\beta) \hat{e} w$ om $w \hat{e} (I^*-C^*)$

(d) Er $\alpha = T;c(\beta)$ der $T;c(\beta)$ er en lukket formel i L(D) og C enten er et navn eller en konstant i L(D) setter vi:
(12.1) $(M^*,w) \models T;c(\beta) \leftrightarrow \langle v(c), f(\beta)\rangle \hat{e} \varphi(T)(w)$ om $w \hat{e} C^* = I$
(12.2) $(M^*,w) \models T;c(\beta) \leftrightarrow f(T;c(\beta)) \hat{e} w$ om $w \hat{e} (I^*-C^*)$

I lys av (8.1) - (12.2) skulle det være klart at sannhetsrelasjonen $(M^*,w) \models \alpha$ er fiksert for absolutt alle mulige verdener i I^*, inklusive de unormale, samt for alle lukkede formler i L(D).

Før vi nå går videre og fullfører definisjonen av M^* har finner vi det hensiktsmessig å innføre en viss funksjon ζ som avbilder U en-entydig inn i mengden av delmengder av I U Pt(U). La oss nevne at vi her forutsetter at modellstrukturen M er slik at Pt(U) og I er disjunkte. ζ er definert slik:

(13.1) $\zeta(u) = Mg(y: u \hat{e} y \ \& \ y \hat{e} Pt(U)) \ U \ \sigma(u)$ om $u \hat{e} U$

Man ser umiddelbart når ζ er definert på denne måten at det dreier seg om en funksjon. Vi ønsker imidlertid også å vise at den er en-entydig. Anta derfor for vilkårlige $x,y \hat{e} U$ at $x \neq y$. Vi skal vise at vi da har $\zeta(x) \neq \zeta(y)$. Anta for reduktio ad absurdum at $\zeta(x) = \zeta(y)$. Ved hjelp av (13.1) følger da:

$Mg(z: x \hat{e} z \ \& \ z \hat{e} Pt(U)) \ U \ \sigma(x) = Mg(z: y \hat{e} z \ \& \ z \hat{e} Pt(U)) \ U \ \sigma(y)$

Det er nå to muligheter: $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ Da har vi åpenbart $\zeta(x) \neq \zeta(y)$ som er umulig. Eller så er $\sigma(x) = \sigma(y)$. Da må vi ha: $Mg(z: x \hat{e} z \ \& \ z \hat{e} Pt(U)) = Mg(z: y \hat{e} z \ \& \ z \hat{e} Pt(U))$. Men $\{x\}$ Inkl U og derfor $\{x\} \hat{e} Pt(U)$. Siden $x \hat{e} \{x\}$ følger det at $\{x\} \hat{e} Mg(z: y \hat{e} z \ \& \ z \hat{e} Pt(U))$. Da y=x. Men dette strider mot forutsetningen at $x \neq y$. Det bør bemerkes at dette resonnementet forutseter at Pt(Pt(U)) ikke har felles medlemmer med I, ie. at $Pt(Pt(U)) \cap I = \emptyset$. Men vi kan lett anordne det slik at vår modell M oppfyller dette kravet.

Vi har altså at $\zeta : U \text{ -(1-1) -> } Pt(I \ U \ Pt(U)) = Pt(C^* \ U \ (I^* - C^*)) = Pt(I^*)$

På basis av definisjonen vi ovenfor har gitt av sannhetsrelasjonen $(M^*,w) \models \alpha$ ser man ved et enkelt induksjonsbevis på lengden av formler at vi må ha:

(+) $(M^*,w) \models \alpha \leftrightarrow (M,w) \models \alpha$ for alle $w \hat{e} C^*$, dvs. I og alle $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$

Videre har vi siden M er en normal modellstruktur for L basert på finstrukturerte utsagn at

© 2008 Morten Harboe Rognes

(13.2) $(M,w) \models \alpha \leftrightarrow w \hat{e} \sigma(f(\alpha))$. Man ser også fra definisjonen av $(M^*,w) \models \alpha$ at man har (13.3) $Mg(w: w \hat{e} (I'\text{-}C^*) \& (M^*,w) \models \alpha) = Mg(w: w \hat{e} (I^*\text{-}C^*) \& f(\alpha) \hat{e} w)$. Fra disse tre forhold kan man slutte:

(13.4) $Mg(w: w \hat{e} I^* \& (M^*,w) \models \alpha) = \sigma(f(\alpha)) \cup Mg(w: w \hat{e} (I^*\text{-}C^*) \& f(\alpha) \hat{e} w)$

Fra dette og (13.1) følger:

(13.5) $Mg(w: w \hat{e} I^* \& (M^*,w) \models \alpha) = \zeta(f(\alpha))$

Man ser nå fra det vi så langt har bevist at dersom vi kan fullføre definisjonen av V^* slik at kravene i Definisjon 4.1 og 4.2 er oppfylt så vil vi være ferdige. I lys av (+) vil da M^* være en modellstruktur som oppfyller de betingelsene som er nevnt i Teorem 9.1.

(A) Vi definerer først $V(\neg)$. Dette gjøres ved tilfelle: Anta $X \hat{e} Pt(I^*)$ og det finnes en $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$ slik at $X = Mg(w: w \hat{e} I \& (M^*,w) \models \alpha)$. Da setter vi:

(14.1) $V(\neg)(X) = Mg(w: w \hat{e} I^* \& (M^*,w) \models \neg \alpha)$

Anta på den annen side at $X \hat{e} Pt(I^*)$ og at det ikke finnes noen $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$ slik at $X = Mg(w: w \hat{e} I \& (M^*,w) \models \alpha)$. Da setter vi:

(14.2) $V(\neg)(X) = Mg(w: w \hat{e} I^* \& \neg(w \hat{e} X))$

Dermed er $V(\neg)$ fullstendig definert.

Man ser umiddelbart fra denne definisjonen at $V(\neg) \hat{e} Pt(I^*) \wedge Pt(I^*)$.

Vi må vise at $V(\neg)$ oppfyller kravet i Definisjon 4.1. Dette innebærer at vi må vise:

(14.3) $(Aw)(w \hat{e} C^* \& X \hat{e} Pt(I^*) \rightarrow (w \hat{e} V(\neg)(X) \leftrightarrow \neg(w \hat{e} X))$

Anta $w \hat{e} C^*$ og $X \hat{e} Pt(I^*)$.

Tilfelle (i): $X = Mg(w: w \hat{e} I^* \& (M^*,w) \models \alpha)$ for noen $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$. Da har vi ved hjelp av (14.1) at $w \hat{e} V(\neg)(X) \leftrightarrow (M^*,w) \models \neg\alpha \leftrightarrow \neg((M^*,w) \models \alpha) \leftrightarrow \neg(w \hat{e} X)$. Dette viser at (14) holder.

Tilfelle (ii): Det er ikke slik at det finnes noen $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$ slik at $X = Mg(w: w \hat{e} I^* \& (M^*,w) \models \alpha)$. Da har vi ved hjelp av (14.2):

$w \hat{e} V(\neg)(X) \leftrightarrow w \hat{e} Mg(w: w \hat{e} I^* \& \neg(w \hat{e} X)) \leftrightarrow \neg(w \hat{e} X)$.

Dette viser at (14.3) holder.

Det er imidlertid også nødvendig å vise at valuasjonsregelen for $\neg$ i Definisjon 4.2 er oppfylt. Dette innbærer at vi må vise:

(14.4) Anta $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$ og at $\alpha = \neg\beta$. Da gjelder:

$(M,w) \models \alpha \leftrightarrow w \hat{e} V(\neg)(Mg(w: w \hat{e} I \& (M,w) \models \beta))$

Det følgende resonnement viser at (14.4) holder: Anta $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$ og at $\alpha = \neg\beta$ for noe β. Sett $X = Mg(w: w \hat{e} I \& (M,w) \models \beta)$. Da har vi ved hjelp av (14.1) at

$(M,w) \models \alpha \leftrightarrow (M,w) \models \neg\beta \leftrightarrow w \hat{e} Mg(w: w \hat{e} I^* \& (M^*,w) \models \neg \alpha)$

$\leftrightarrow w \hat{e} V(\neg)(Mg(w: w \hat{e} I \& (M,w) \models \beta))$.

Dette viser at påstanden holder.

(B). Det er også nødvendig å definere $V^*(\rightarrow)$. Dette gjøres igjen ved å sondre mellom to tilfeller: Anta $X,Y \hat{e} Pt(I^*)$ Tilfelle (i): Det finnes formler $\alpha,\beta \hat{e} CFm(L(D))$ slik at $X = Mg(w: w \hat{e} I^* \& (M^*,w) \models \alpha)$ og $Y = Mg(w: w \hat{e} I^* \& (M^*,w) \models \beta)$. I så fall setter vi per definisjon:

(15.1) $V^*(\rightarrow)(X,Y) = Mg(w: w \hat{e} I^* \& ((M,w) \models \alpha \rightarrow \beta))$

Tilfelle (ii). Det finnes ikke formler α,β av den typen som er nevnt i det foregående tilfelle. I så fall setter vi:

(15.2) $V^*(\rightarrow)(X,Y) = Mg(w: w \hat{e} I^* \& (w \hat{e} X \rightarrow w \hat{e} Y))$

Dermed er $V^*(\rightarrow)$ fullstendig definert.

© 2008 Morten Harboe Rognes

Vi må vise at V*(→) definert på denne måten oppfyller kravet som er nevnt i Definisjon 4.1 under punkt (iv). Dette innebærer at vi må vise:

(Aw)(wêC* → (wêV*(→)(X,Y) ↔ (wêX → wêY))) dersom X,YêPt(I*)

Det skulle imidlertid være opplagt at dette holder i lys av (15.1) og (15.2).
Det er imidlertid også nødvendig å vise at vi kan utlede valuasjonsregelen for → i Definisjon 4.2, med andre ord at:

Er γêCFml(L(D)) og har vi γ = (α→β) holder:

(M*,w) ⊨ γ ↔ wêV(→)(Mg(w': (M*,w') ⊨ α) , Mg(w': (M*,w') ⊨ α))

Også her skulle det ikke være nødvendig med noe omstendelig bevis. Man ser at dette holder ikraft av den første delen av definisjonen av V*(→), med andre (15.1)

(C) Det er også nødvendig å definere V*(A). Anta Xê(Pt(I*)^D*) og at det finnes en formel α i L(D) slik at

(16.1) X= Mg(<a, Mg(w: wêI* & (M*,w) ⊨α;x [n(a)]>: aêD*).

Da setter vi:

(16.2) V*(A)(X) = Mg(w: wêI* & (M*,w) ⊨ (Ax)α)

Dersom Xê(Pt(I*)^D) og det ikke finnes noen formel α slik at (16.1) setter vi:

(16.3) V*(A)(X) = Mg(w:wêI & (Aa)(aêD* → wêX(a))

Dermed er V*(A) fullstendig definert. Man ser at V*(A)ê Pt(I*) ^(Pt(I*)^D*).

Vi må vise at V*(A) definert på denne måten oppfyller kravet (1) som er nevnt i punkt (iv) i Definisjon 4.1. Dette innebærer at vi må godtgjøre, at dersom XêPt(I*)^D*, så har vi for alle wêC, at:

(16.4) wêV*(A)(X) ↔ (Aa)(aêD* → wêX(a)))

Anta derfor at XêPt(I*)^D*, og at wêC*. Har vi at det finnes α i L(D) slik at (16.1), følger at

(16.5) wêV*(A)(X) ↔ (M*,w) ⊨ (Ax)α ↔ (Aa)(aêD* → (M*,w) ⊨ α;x[n(a)].

Dette følger ved hjelp av definisjonen av sannhetsrelasjonen "(M*,w) ⊨ α". Men i lys av (16.1) har vi at wêX(a) ↔ (M*,w) ⊨α;x [n(a)] om wêI* og aêD*. Fra dette og (16.5) følger (16.4) i dette tilfelle.

Har vi det ikke finnes noen formel α i L(D) slik at (16.1) har vi direkte fra (16.2) at (16.4) holder.

Det neste vi må gjøre er å vise at valuasjonsregelen for allkvantoren slik den er gitt i Definisjon 4.2 holder. Vi må derfor vis at dersom γ= (Ax)α så har vi:

(M*,w) ⊨ γ ↔ wêV*(A)(Mg(<a,Mg(w': w'êI* & (M*,w') ⊨ α;x[n(a)])>: aêD*))

Anta derfor at γ = (Ax)α. Sett X = Mg(<a, Mg(w: wêI* & (M*,w) ⊨α;x [n(a)]>: aêD*). Det er klart at denne mengden X eksisterer. Men da har vi i lys av (16.2) at:

(M*,w) ⊨ γ ↔ (M*,w) ⊨ (Ax)α ↔ wêV*(A)(X)
↔ wêV*(A)(Mg(<a,Mg(w': w'êI* & (M*,w') ⊨ α;x[n(a)])>: aêD*))

som er det vi ønsker.

Det kan dermed anses for godtgjort at vi har konstruert V*(A) på en måte som er konsistent med Definisjon 4.1 og Definisjon 4.2.

(D) Det eneste som nå gjenstår for å fullføre konstruksjonen av M* er definere V*(T). Dessuten må vi vise at M* oppfyller de kravene som vi stiller til en Kη+- modellstruktur basert på unormale verdener. Vi definerer først V*(T). Definisjonen i dette tilfelle blir noe mer komplisert fordi vi må anordne det slik at Mg(y: yêPt(I*) & wêV(T)(a,y)) utgjør en deduktivt lukket så sant wêC og aêq*(w). Vi gir den følgende definisjon:

(17.1) Anta <a,X>êD*xPt(I*) da setter vi:

© 2008 Morten Harboe Rognes

wêV*(T)(a,X) ↔
[(wêC* & aêq*(w) & (Ey)(<a,y>êφ(T)(w) & yêU & σ(y) Inkl X))
v (wêC* & ¬(aêq*(w)) & (Ey)(yêU & <a,y>êφ(T)(w) & X= ζ(y)))
v (wê(I*-C*) & (Eα)(αêCFm(L(D)) & X= ζ(f(α)) & f(T;n(a)(α))êw))]

La oss gi noen kommentarer til denne definisjonen før vi går videre:

Man ser at det er en definisjon ved tilfelle. Vi sondrer mellom to hovedtilfelle, nemlig wêC* og wê(I*-C*). Noen andre muligheter er det ikke. I det første hovedtilfelle sondrer vi mellom to undertilfelle alt ettersom aêq*(w) eller ikke. I det første tilfelle der vi har wêC* & aêq*(w) setter vi altså at:

wêV*(T)(a,X) ↔ (Ey)(<a,y>êφ(T)(w) & yêU & σ(y) Inkl X)

I det andre tilfelle der wêC* & ¬(aêq*(w)) setter vi

wêV*(T)(a,X) ↔ (Ey)(yêU & <a,y>êφ(T)(w) & X= ζ(y))

I det siste tilfellet: wê(I*-C*) setter vi:

wêV*(T)(a,X) ↔ (Eα)(αêCFm(L(D)) & X= ζ(f(α)) & f(T;n(a)(α))êw))

Det er nå nødvendig å vise at V*(T) oppfyller valuasjonsregelen for konnektivet T som er nevnt i punkt (vii) i Definisjon 4.2. Dette innebærer at vi må bevise dersom β er en lukket formel i L(D) og c enten er en konstant eller et navn i L(D) at

(17.2) (M*,w) ⊨ T;c(β) ↔ wêV*(T)(v(c), Mg(w: wêI & (M*,w) ⊨ β))

Her er v(c) = V*(c) (= φ(c)(w)) om c er en konstant. v(c)=n;-1(c) om c er et navn.

Vi tar først for oss kondisjonalen mot venstre i (17.2) og gir bevis for den.

(I) Sett (17.3) X;0 = Mg(w: wêI & (M*,w) ⊨ β). Anta høyre side i (17.2) holder. Da følger ved hjelp av (17.3) at: (17.4) wêV*(T)(v(c),X;0).

Vi skiller, noe som det er naturlig å gjøre i forbindelse med definisjonen (17.1), mellom tre tilfelle:

Tilfelle(i): v(c)êq*(w) & wêC*. Fra (17.1) og (17.4) følger da at det finnes y0 slik at: (17.5) <a,y0>êφ(T)(w) & y0êU & σ(y0) Inkl X;0. Nå har vi i lys av (13.5) som vi tidligere har bevist at (17.6) X;0 = ζ(f(β)). Siden C*Ω (I*-C*) er disjunkte og σ(y0) Inkl I=C* følger fra den siste konjunkten i (17.5) og (17.6) at

(17.7) σ(y0) Inkl σ(f(β)) U Mg(w: wê(I*-C*) & f(β)êw)

Herav har vi så (17.8) σ(y0) Inkl σ(f(β)). Men siden M er en Kη+ -modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn er Mg(y: yêU & <v(c), y>êφ(T)(w)) deduktivt lukket når v(c)êq*(w) = φ(η)(w) og wêC*=I. Men fra den første konjunkten i (17.5) og (17.8) må det da følge at <v(c),f(β)>êφ(T)(w). Men fra dette og definisjonen av sannhetsrelasjonen "(M*,w) ⊨ α" følger: (M*,w) ⊨ T;c(β), som er det vi ønsker.

Tilfelle (ii): wêC* & ¬(v(c)êq*(w)). Da følger ved hjelp av (17.1) og (17.4) at det finnes y0 der vi har:

(17.9) y0êU & <v(c),y0>êφ(T)(w) & X;0= ζ(y0)

Nå har vi i lys av (13.5) at X;0 = Mg(w: wêI* & (M*,w) ⊨ β) = ζ(f(β)). Fra dette og (17.9) følger: (17.10) ζ(y0) = ζ(f(β)). Men ζ er en-entydig. Derfor har vi y0= f(β). Fra dette og den andre komponenten i (17.9) følger <v(c), f(β)>êφ(T)(w). Herav i har vi så ved hjelp av (12.1) at (M*,w) ⊨ T;c(β)

Tilfelle (iii): wê(I* - C*). Fra dette (17.1) og (17.4) følger at det finnes α der

(17.11) αêCFm(L(D)) & X;0= ζ(f(α)) & f(T;n(v(c))(α))êw).

Nå har vi igjen ved hjelp av (13.5) at X;0 = Mg(w: wêI* & (M*,w) ⊨ β) = ζ(f(β)). Fra dette og den andre komponenten i (17.11) følger ζ(f(α)) = ζ(f(β)). Siden ζ er en-entydig kan man herav slutte: f(α) = f(β). Men dette innbærer at β bare avviker fra α ved å ha en eller flere konstanter på steder hvor α har koreferensielle konstanter. Det følger da at T;n(v(c))(β) på være nøyaktig som T;n(v(c))(α) bortsett fra å ha visse forekomster av konstanter eller navn på steder hvor den

© 2008 Morten Harboe Rognes

siste fomelen har forekomster av konstanter eller navn med samme referanse. I lys av Definisjon 8.1, punkt (iv), har vi da f(T;n(v(c))(α)) = f(T;n(v(c))(β)) og derfor at f(T;n(v(c))(β))êw. Fra dette, forutsetningen om at wê (I*-C*) og (12.2) følger at (M*,w) ╞ T;c(β).

Dermed har vi levert et fullstendig bevis for kondisjonalen mot venstre i (17.2) Vi må imidlertid også gi et fullstendig bevis for kondisjonalen mot høyre:

(II) Anta derfor at (18) (M*,w) ╞ T;c(β). Vi skiller mellom to hovedtilfeller:

Hovedtilfelle (i): wêC*. Da har vi per definisjon i lys av (12.1) at (18.1) <v(c), f(β)>êφ(T)(w). Sett X;0= Mg(w: wêI & (M*,w) ╞ β). Da har vi ved hjelp av (13.5) at (18.2) X;0=ζ(f(β)).

Undertilfelle 1: v(c)êq*(w). Siden

X;0 = ζ(f(β)) = σ(f(β))U Mg(w: wê(I*-C*)& f(β)êw) har vi åpenbart at (18.3) σ(f(β)) Inkl X;0. Dette (18.1), samt det faktum at f(β)êU impliserer sammen med definisjonen (17.1) at wêV*(T)(v(c),X;0), som er det vi ønsker.

Undertilfelle 2: ¬(v(c)êq*(w)). Da har vi ved hjelp av (18.1)og (18.2) at (Ey)(yêU & <v(c),y>êφ(T)(w) & X;0= ζ(y)). Fra dette og (17.1) følger så wêV*(T)(v(c),X;0)

Hovedtilfelle (ii): wê(I*-C*). Da har vi ved hjelp av (12.2) og (18) at f(T;c(β))êw. Men i lys av (13.5) har vi

X;0= Mg(w: wêI* & (M*,w) ╞ β) = ζ(f(β)). Det følger da at:

(Eα)(αêCFm(L(D)) & X;0= ζ(f(α)) & f(T;c(α))êw)). Det følger da ved hjelp av (17.1) at wêV*(T)(v(c),X;0)

Dermed har vi levert et fullstendig bevis for (17.2) og vist om strukturen M*= <D*,C*,I*,q*,V*> at den er en modellstruktur for L basert på unormale verdener som oppfyller kravene i Definisjon 4.1 og 4.2

Det er imidlertid nødvendig å vise at den også er en Kη+ modellstruktur gitt at M er en Kη+ -modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn.

Dette innbærer at vi må vise at Mg(y: yêPt(I*) & wêV*(T)(a,y)) inneholder alle logiske sannheter, er konsistent, strengt konjunktivt lukket og deduktivt lukket, kort sagt oppfyller alle kravene som er nevnt i Definisjon 4.5 såsant aêq(w) & wêC*.

Vi skal først vise:

(19) aêq*(w) & wêC* & XêPt(I*) & C* Inkl X → wêV*(T)(a,X)

Anta derfor at (19.1) aêq*(w) & wêC* & XêPt(I*) & C* Inkl X. . Det vil være tilstrekkelig å vise:

(19.2) (Ey)(<a,y>êφ(T)(w) & yêU & σ(y) Inkl X))

Fra den første og andre konjunkten her følger wêφ(η)(w) & wêI. Siden M er en Kη+-modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn har vi at

(19.3) (Ax)(xêU & σ(x)= I → xêMg(y: yêU & <a,y>êφ(T)(w)).

Siden σ er på Pt(I) følger det at det finnes y0êU slik at σ(y0)= I = C*. Fra dette og (19.3) følger at: (19.4) <a,y0>êφ(T)(w). Men siden σ(y0) = C* har vi ved hjelp av siste konjunkt i (19.1) at σ(y0) Inkl X. Dette og (19.4) impliserer det vi ønsker, nemlig (19.2).

Vi må så vise at Mg(y: yêPt(I*) & wêV*(T)(a,y)) er strengt konjunktivt lukket. Anta derfor (20.1) aêq*(w) & wêC*. Sett T;(a,w) = Mg(x: wêV*(T)(a,x)).

Anta (20.2) Δ≠ø, Δ Inkl Pt(I) og at Δ Inkl T;(a,w). Anta videre at (20.3) X;0êPt(I) og X;0ΩC* = SN(Mg(xΩC*: xêΔ)). Vi må da vise at X;0 êT;(a,w), det vil si i lys av (17.1) at (Ey)(<a,y>êφ(T)(w) & yêU & σ(y) Inkl X;0)

© 2008 Morten Harboe Rognes

Er XêΔ har vi ifølge (20.2) at wêV*(T)(a,X). Fra dette og (17.1) følger i lys av (20.1) at det finnes y slik at <a,y>êφ(T)(w) & yêU & σ(y) Inkl X. For hver X i Δ velger vi derfor ut en slik i y som vi betegner med u(X).[7] Da har vi:

(20.4) (AX)(XêΔ → <a,u(X)>êφ(T)(w) & u(X)êU & σ(u(X)) Inkl X)

Vi har Mg(u(X): xêΔ) Inkl Mg(u: <a,u>êφ(T)(w)). Siden M er en Kη+-modell basert på finstrukturerte utsagn er den siste mengden strengt konjunktivt lukket. Det innebærer at det finnes et utsagn u;0êU der vi har <a,u;0>êφ(T)(w) og der vi har:

(20.5) σ(u;0) = SN(Mg(σ(u(X)): XêΔ)). Fra (20.4) følger imidlertid:

(AX)(XêΔ → σ(u(X)) Inkl X) Enn mer har vi siden σ(u) inkludert i I = C* at (AX)(XêΔ → σ(u(X)) Inkl XΩC*). Fra dette kan man slutte at:

(20.6) SN(Mg(σ(u(X)): X êΔ)) Inkl SN(Mg(XΩC*: XêΔ)

Men fra den andre konjunkten i (20.3), samt (20.5) og (20.6) følger det at σ(u;0) Inkl X;0. Dette sammen med det at <a,u;0>êφ(T)(w) & u;0êU impliserer at X;0êT;(a,w)

Vi må dernest vise at Mg(y: yêPt(I*) & wêV*(T)(a,y)) er deduktivt lukket. Mer presist er det nødvendig å bevise, gitt at aêq*(w) & wêC*,

(21) Xê Mg(x: wêV*(T)(a,x))& YêPt(I*) & XΩC* Inkl YΩC* → Yê Mg(x: wêV*(T)(a,x))

Anta (21.1) wêV*(T)(a,X) & YêPt(I*) & XΩC* Inkl YΩC* . Fra den første konjunkten her følger ved hjelp av (17.1), siden vi forutsetter at aêq*(w) & wêC*, at det finnes y slik at (21.2) <a,y>êφ(T)(w) & yêU & σ(y) Inkl X. Men σ(y) Inkl I=C*. Fra den sidte konjunkten i (21.2) og den siste konjunkten i (21.1) følger derfor σ(y) Inkl YΩC*. Men fra dette og de to første konjunktene i (21.2) følger så wêV*(T)(a,Y) ved hjelp av (17.1) siden vi forutsetter at aêq*(w) & wêC*.

Tilslutt må vi vise at , gitt aêq*(w) & wêC*, følgende holder:

(22) wêV*(T)(a,X)& Yê Pt(I*) & YΩC* = C -(XΩC*) → ¬ (wêV*(T)(a,Y))

forutsatt naturligvis at XêPt(I*).

Anta (22.1) wêV*(T)(a,X) & YΩC* = C* -(XΩC*).

Anta for reduktio ad absurdum at (22.2) wêV*(T)(a,Y)

Fra den første konjunkten i (22.1) og fra (22.2) følger ved hjelp av (17.1) at det finnes u1 og u2 slik at:

(22.3) <a,u1>êφ(T)(w) & u1êU & σ(u1) Inkl X og

(22.4) <a,u2>êφ(T)(w) & u1êU & σ(u2) Inkl Y

Siden σ(u1) Inkl I = C* og σ(u2) Inkl I = C* har vi at: σ(u1) Inkl XΩ C* og σ(u2) Inkl YΩ C*. Men fra disse to forhold og den siste konjunkten i (22.1) følger det at

(22.5) σ(u1) Ω σ(u2) = ø. Men siden M er en Kη+ -modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn innebærer dette at Mg(u : <a,u>êφ(T)(w)) er en konsistent utsagns mengde i M. I sin tur impliserer dette at det finnes wêI = C* slik at

(22.6) (Au)(<a,u>êφ(T)(w) → wêσ(u)).

Men fra Fra (22.3), (22.4) og (22.6) har vi at wêσ(u1)Ω σ(u2). Dette strider mot (22.5). Dermed har vi bevist at M* også oppfyller kravet (22).

Helt tilslutt må vi vise at M* , slik vi nå har definert denne modellstrukturen basert på på unormale verdener, også oppfyller det tredje kravet i teoremet.

[7] Vi benytter på dette punkt utvalgsaksiomet.

© 2008 Morten Harboe Rognes

La Q være mengden av alle de formler i L(D) som ikke inneholder noen konstanter hentet fra L. Hvis en formel i Q inneholder konstanter må dette være navn. Fra definisjonen av en modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn fremgår det da at f avbilder Q en-entydig inn i U. Vi har derfor (23) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Q \,\&\, \alpha \neq \beta \rightarrow f(\alpha) \neq f(\beta))$. I lys av (13.5) har vi imidlertid at (24) $Mg(w: w \hat{e} I^* \,\&\, (M^*,w) \models \alpha) = \zeta(f(\alpha))$ om $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$. Vi har også, som man husker, bevist at ζ avbilder U en-entydig inn i Pt(I*). Fra dette faktum, (23) og (24) følger det at vi har:

$(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Q \,\&\, \alpha \neq \beta \rightarrow$
$Mg(w: w \hat{e} I^* \,\&\, (M^*,w) \models \alpha) \neq Mg(w: w \hat{e} I^* \,\&\, (M^*,w) \models \beta)$

Dette viser at M* også oppfyller det tredje kravet.

Vi har nå levert et fullstendig bevis for at M* er en Kη+- modellstruktur for L basert på unormale verdener. I lys av (3) , (4) , (+) og det vi bemerket rett ovenfor ser man også at M* oppfyller alle kravene som er nevnt i satsen. **QED.**

Ser man på beviset ovenfor er det bare i bevisets siste del at vi har henvist til at $M=<D,I,U,\sigma,\varphi,f>$ skal ha alle de egenskapene som en Kη+-modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn skal ha. Frem til formel (19) i beviset ovenfor har vi bare forutsatt at M er en normal modellstruktur for L basert på finstrukturerte utsagn der $Mg(y: y \hat{e} U \,\&\, <a,y> \hat{e} \varphi(T)(w))$ er lukket under logisk konsekvens såfremt $a \hat{e} \varphi(\eta)(w)$ og $w \hat{e} I$. Utover dette har vi ikke forutsatt noe mer. Tenker vi oss at M er en Kη-modellstruktur vil beviset ovenfor lett kunne la seg gjennomføre. Det eneste er at vi nå ikke kan vise at $Mg(X: w \hat{e} V^*(T)(a,X))$ er strengt konjunktivt lukket. Den vil bare være lukket under endelig konjunksjon. Tilsvarende kan vi vise om vi forutsetter at M bare er en Kη- -modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn at M* er en Kη- -modellstruktur for L basert på unormale verdener. Dette innebærer at vi lett kan modifisere beviset ovenfor slik at vi får bevis for de følgende to satser som er helt analoge med Teorem 9.1:

Teorem 9.3 Anta L er et språk for doxastisk logikk. Anta $M=<D,I,U\sigma,\varphi,f>$ er en Kη -modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn for L. Da finnes det en Kη- modellstruktur $M^* = <D^*,C^*,I^*,q^*,V^*>$ basert på unormale verdener som oppfyller de følgende tre krav:

(i) $C^* = I$ og $D^*=D$

(ii) For alle $w \hat{e} I$ og for alle $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$ gjelder:
$(M^*,w) \models \alpha \leftrightarrow (M,w) \models \alpha$

(iii) La Q være mengden av alle de lukkede formler i L(D) som ikke innholder noen konstanter hentet fra L. Da oppfyller M* det følgende krav:

$(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Q \,\&\, \alpha \neq \beta \rightarrow$
$Mg(w: w \hat{e} I \,\&\, (M^*,w) \models \alpha) \neq Mg(w: w \hat{e} I \,\&\, (M^*,w) \models \beta))$

Dessuten har vi:

Teorem 9.4 Anta L er et språk for doxastisk logikk. Anta $M=<D,I,U\sigma,\varphi,f>$ er en Kη- -modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn for L. Da finnes det en Kη- - modellstruktur $M^* = <D^*,C^*,I^*,q^*,V^*>$ basert på unormale verdener som oppfyller de følgende to krav:

(i) $C^* = I$ og $D^*=D$

(ii) For alle $w \hat{e} I$ og for alle $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$ gjelder:

© 2008 Morten Harboe Rognes

$(M^*,w) \models \alpha \leftrightarrow (M,w) \models \alpha$

(iii) La Q være mengden av alle de lukkede formler i L(D) som ikke innholder noen konstanter hentet fra L. Da oppfyller M* det følgende krav:

$(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Q \ \& \ \alpha \neq \beta \rightarrow$
$Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M^*,w) \models \alpha) \neq Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M^*,w) \models \beta))$

Vi går nå videre og skal gi et bevis for Teorem 9.2.

Bevis for Teorem 9.2: Anta forutsetningene i teoremet holder, dvs. anta (1) at L er et språk for doxastisk logikk. Anta videre (2) at $M=<D,C,I,q,V>$ er en $K\eta$+-modellstruktur for L basert på unormale verdener. La Q være mengden av alle de formler CFm(L(D)) som ikke inneholder konstanter fra L, og anta at M oppfyller kravet:

(3) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Q \ \& \ \alpha \neq \beta \rightarrow$
$Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \alpha) \neq Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \alpha)$

Gitt disse forutsetningene skal vi vise at det finnes en $K\eta$+-modellstruktur, $M^*= <D^*,I^*,U^*,\sigma^*,\varphi^*,f^*>$, for L basert på finstrukturerte utsagn som oppfyller kravene som er nevnt i teoremet. Vi skal først konstruere de enkelte komponentene i denne modellstrukturen M^*. Først setter vi:

(4) $D^*=D$ og

(5) $I^* = C$

Vi lar lar de finstrukturerte utsagnene i modellstrukturen M^* være representert ved de diverse delmengdene av I. Dette innebærer at vi setter:

(6) $U^* = Pt(I^*)$

Sannhetsfunksjonen σ^* definerer vi slik:

(7) $\sigma^*(u) = u\Omega C$ om $u \hat{e} Pt(I)$

Dermed har vi definert de fire første komponentene i M^*. Det gjenstår å definere φ^*. Dette gjør vi slik:

Er P et n-ært ikke-logisk predikat i L setter vi:

(8.1) $\varphi^*(P) = V(P)(w)$ om $w \hat{e} C = I^*$

For identitetspredikatet "=" og rasjonalitetspredikatet "η" stipuleres det:

(8.2) $\varphi^*(=)(w) = V(=)(w)$ om $w \hat{e} C$

(8.3) Videre setter vi $\varphi^*(\eta)(w) = q(w)$ om $w \hat{e} C$

Når det gjelder konstantene i L setter vi:

(8.4) $\varphi^*(c)(w) = V(c)(w)$ om $w \hat{e} C$ og c er en slik konstant.

Det gjenstår nå bare å definere valuasjonsfunksjonen φ^* for trosoperatoren "T". Dette gjøres slik:

(9) $<x,u> \hat{e} \varphi^*(T)(w) \leftrightarrow w \hat{e} V(T)(x,u)$ forutsatt at $x \hat{e} D^*$ og $u \hat{e} Pt(I)$

Dermed har vi definert komponenten φ^*. Det gjenstår å definere f^*. Dette gjøres ved:

(10) $f^* = Mg(<\alpha, Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \alpha)>: \alpha \hat{e} CFm(L(D)))$

Dermed er modellstrukturen $M^* = <D^*,I^*,U^*,\sigma^*,\varphi^*,f^*>$ fullstendig definert.

Det er nå nødvendig å verifisere at M^* virkelig er en modellstruktur for L basert på finstrukturerte utsagn. Dette innebærer at det må verifiseres at M^* oppfyller alle kravene i Definisjon 8.1. Dette er imidlertid ikke særskilt vanskelig.

Man ser lett at D^*, I^* og U^* er ikke-tomme mengder. Videre er det klart at funksjonen σ^* avbilder U^* *på* $Pt(I^*) = Pt(C)$. For anta at $a \hat{e} Pt(I^*)$. Da har vi a Inkl $I^* = C$. Det er da klart at det finnes en delmengde x av I slik at $x\Omega C = a$. En slik x vil være et element i U^* i lys av (7)

© 2008 Morten Harboe Rognes

ovenfor. Man ser også med en gang at φ* oppfyller de krav som stilles i definisjonen av en modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn, Definisjon 8.1.

Når det gjelder funksjonen f* ser man også lett at den oppfyller kravet (iv) i Definisjon 8.1 i lys av forbeholdet (iii) i Teorem 9.2.

Vi må imidlertid også vise at M* er en normal modellstruktur for L basert på finstrukturerte utsagn. Dette innebærer at vi må bevise at:

(11) $w \hat{e} \sigma^*(f^*(\alpha)) \leftrightarrow (M^*,w) \models \alpha$ om $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$ og $w \hat{e} I^*$

Nå ser man at vi ved hjelp av (6) og (11) har:

$w \hat{e} \sigma^*(f^*(\alpha)) \leftrightarrow w \hat{e} Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \alpha) \ \Omega \ C \leftrightarrow (M,w) \models \alpha$

Det vil derfor være nok for å bevise at (11) holder, dvs. at modellstrukturen er normal, å vise at

(12) $(M^*,w) \models \alpha \leftrightarrow (M,w) \models \alpha$ for alle $w \hat{e} C=I^*$ og alle $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$

Denne formelen vises imidlertid ved et enkelt induksjonsbevis på lengden av formlene i L(D)). Både basistrinnet og de diverse induksjonstrinnene i dette beviset er såpass lette å gjennomføre at de kan overlates til leseren.

Siden M er en Kη+-modellstruktur for L basert på unormale verdener må vi også vise at M* er en Kη+-modellstruktur. Dette impliserer at vi må vise at M* oppfyller kravene i Definisjon 8.6. Med andre ord må det bevises at dersom $w \hat{e} I^*$ og $x \hat{e} \varphi^*(\eta)(w)$ har man at utsagnsmengden $Mg(u : u \hat{e} U^* \ \& <x,u> \hat{e} \varphi^*(T)(w))$ er konsistent i M*, inneholder alle logisk nødvendig utsagn i M*, er strengt konjunktivt lukket og er deduktivt lukket i M*.

(A) Vi viser først at M* oppfyller det første kravet. Anta (13) $w \hat{e} I^* \ \& \ x \hat{e} \varphi^*(\eta)(w)$. Da har vi naturligvis at (14) $w \hat{e} C \ \& \ x \hat{e} \varphi(\eta)(w) = q(w)$. Siden M er en Kη+-modell oppfyller den krav (i) i Definisjon 4.5. Dette innebærer i lys av (14) at

(15) $(Ay)(y \hat{e} Pt(I) \ \& \ C \text{ Inkl } y \rightarrow w \hat{e} V(T)(x,y))$

Det er nå nødvendig å vise at dersom $u \hat{e} U^* \ \& \ \sigma^*(u) = I^*$ så har man $<x,u> \hat{e} \varphi^*(T)(w)$. Anta derfor at (16) $u \hat{e} U^* \ \& \ \sigma^*(u) = I^*$. Det følger da at $u \Omega C = C$ og derfor at C Inkl u. Da har vi ikraft av (15) at $w \hat{e} V(T)(x,u)$ og derfor i henhold til (9) at $<x,u> \hat{e} \varphi^*(T)(w)$. Dette viser at $Mg(u : u \hat{e} U^* \ \& <x,u> \hat{e} \varphi^*(T)(w))$ inneholder alle logisk nødvendige utsagn om $w \hat{e} I^* \ \& \ x \hat{e} \varphi^*(\eta)(w)$.

(B) Det er også nødvendig å vise at $Mg(u : u \hat{e} U^* \ \& <x,u> \hat{e} \varphi^*(T)(w))$ er lukket under logisk konsekvens om $w \hat{e} I^* \ \& \ x \hat{e} \varphi^*(\eta)(w)$. Anta derfor at (17) $w \hat{e} I^* \ \& \ x \hat{e} \varphi^*(\eta)(w)$. Anta videre at (18) $<x,u1> \hat{e} \varphi^*(T)(w)) \ \& \ u2 \hat{e} U^* \ \& \ \sigma^*(u1)$ Inkl $\sigma^*(u2)$. Fra den første konjunkten følger da ved hjelp av (9) at (19) $w \hat{e} V(T)(x,u1)$. Fra de to andre konjunktene i (18) og (7) ovenfor har vi derfor: (20) $u1 \Omega C$ Inkl $u2 \Omega C$ og $u2 \hat{e} Pt(I)$. Fra (19), (20) samt det tredje kravet i Definisjon 4.5 følger: (21) $w \hat{e} V(T)(x,u2)$. Ved hjelp av (9) kan vi da konkludere med at $<x,u2> \hat{e} \varphi^*(T)(w)$. Dette er det vi ønsker.

(C) Det er også nødvendig å vise at $Mg(u : u \hat{e} U^* \ \& <x,u> \hat{e} \varphi^*(T)(w))$ er konsistent gitt at $w \hat{e} I^* \ \& \ x \hat{e} \varphi^*(\eta)(w)$. For dette formål er det tilstrekkelig å vise følgende:

(22) $u1,u2 \hat{e} U^* \ \& <x,u1> \hat{e} \varphi^*(T)(w) \ \& \ \sigma^*(u2) = I^* - \sigma^*(u1) \rightarrow \neg(<x,u2> \hat{e} \varphi^*(T)(w))$

Anta derfor at (23) $u1,u2 \hat{e} U^* \ \& <x,u1> \hat{e} \varphi^*(T)(w) \ \& \ \sigma^*(u2) = I^* - \sigma^*(u1)$. Fra den første konjunkten her følger: (24) $u1,u2 \hat{e} Pt(I)$. Fra den andre konjunkten følger i lys av (9) : (25) $w \hat{e} V(T)(x,u1)$. Fra den tredje konjunkten har vi så ved hjelp av definisjonen av σ^* at (26) $u2 \Omega C = C - (u1 \Omega C)$. Men fra (24) - (26) har vi ved hjelp av kravet (iv) i Definisjon 4.5 at $\neg(w \hat{e} V(T)(x,u2)$. Men dette innebærer selvfølgelig i lys av (9) det vi ønsker, nemlig at $\neg(<x,u2> \hat{e} \varphi^*(T)(w))$.

(D) Det gjenstår å vise at trosfeltet til x i verdenen w i modellen M* er strengt konjunktivt lukket dersom $w \hat{e} I^*$ og $x \hat{e} \varphi^*(\eta)(w)$. I lys av hva som menes med en strengt konjunktivt lukket utsagnsmengde i en modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn er det tilstrekkelig at vi viser at dersom $w \hat{e} I^*$ og $x \hat{e} \varphi^*(\eta)(w)$ holder følgende:

© 2008 Morten Harboe Rognes

(27) $\Delta \hat{e} Pt(U^*)$ & Δ Inkl $Mg(u : u \hat{e} U^*$ & $\langle x,u\rangle \hat{e} \varphi^*(T)(w))$ &
$y \hat{e} U^*$ & $\sigma^*(y) = SN(Mg(\sigma^*(x): x \hat{e} \Delta)$. $\rightarrow$ $\langle x,y\rangle \hat{e} \varphi^*(T)(w)$

Anta derfor at antesedenten i (27) holder. Fra den andre konjunkten i denne antesedenten følger det ved hjelp av (9) at:

(28) $(Au)(u \hat{e} \Delta \rightarrow w \hat{e} V(T)(x,u))$.

Ved hjelp av definisjonen av σ^* er de to siste konjunkten i antesedenten i (27) ekvivalent med:

(29) $y \hat{e} Pt(I)$ & $y \Omega C = SN(Mg(x \Omega C: x \hat{e} \Delta)$

Fra (28) og (29) kan vi ved hjelp av kravet (ii) i Definisjon 4.5 slutte at $w \hat{e} V(T)(x,y)$. Men fra dette og (9) ovenfor følger selvfølgelig det vi ønsker, nemlig $\langle x,y\rangle \hat{e} \varphi^*(T)(w)$.

Dermed har vi vist at M* tilfredstiller alle de kravene som stilles til en $K\eta+$-modellstruktur for L basert på finstrukturerte utsagn. Dette avslutter vårt bevis for Teorem 9.2. **QED.**

Man ser lett fra beviset ovenfor at dette kan modifiseres til et bevis for den følgende sats. En $K\eta$-modellstruktur basert på unormale verdener for et doxastisk språk L adskiller seg bare fra en $K\eta+$-modellstruktur basert på unormale verdener ved at den førstnevnte bare oppfyller det svake konjunksjonskravet og ikke det sterke. Man ser fra beviset ovenfor at dersom $K\eta$ bare oppfyller det svake konjunksjonskravet kan den konstruerte modellstrukturen M* også lett vises å oppfylle dette krav, samt de andre som stilles til en modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn.

Teorem 9.5 Anta L er et språk for doxastisk logikk. Anta $M=\langle D,C,I,q,V\rangle$ er en $K\eta$-modellstruktur for L basert på unormale verdener. La Q være mengden av alle de formler $CFm(L(D))$ som ikke inneholder konstanter fra L. Anta M oppfyller kravet:

(+) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Q$ & $\alpha \neq \beta \rightarrow$
$Mg(w: w \hat{e} I$ & $(M,w) \models \alpha) \neq Mg(w: w \hat{e} I$ & $(M,w) \models \beta))$

Da finnes det en $K\eta$-modellstruktur $M^*= \langle D^*,I^*,U^*,\sigma^*,\varphi^*,f^*\rangle$ basert på finstrukturerte utsagn for L der vi har:

(i) $D^*= D$ og $I^* = C$

(ii) Er $w \hat{e} C$ og $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$ gjelder:
$(M^*,w) \models \alpha \leftrightarrow (M,w) \models \alpha$

Bemerkninger av samme art som vi gjorde i forbindelse med teoremet ovenfor kan gjøres i forbindelse med $K\eta$- -modellstrukturer basert på unormale verdener. I enhver slik modellstruktur kreves det bare følgende av trosfeltet til et individ som har et rasjonelt organisert trosfelt. For det første må det inneholde alle nødvendige utsagn. For det andre må det være lukket under endelig konjunksjon. For det tredje må det være deduktivt lukket. Det stilles altså ikke noe krav om at det er strengt konjunktivt lukket eller at det er konsistent. Ser man nærmere på beviset ovenfor ser man lett at den modellstrukturen M* basert på finstrukturerte utsagn som konstrueres må oppfylle disse tre kravene om den modellstrukturen M basert på unormale verdener som man tar sitt utgangspunkt i oppfyller dem. Beviset for Teorem 9.2 kan derfor lett endres til et bevis for den følgende sats:

Teorem 9.6 Anta L er et språk for doxastisk logikk. Anta $M=\langle D,C,I,q,V\rangle$ er en $K\eta$- -modellstruktur for L basert på unormale verdener. La Q være mengden av alle de formler $CFm(L(D))$ som ikke inneholder konstanter fra L. Anta M oppfyller kravet:

© 2008 Morten Harboe Rognes

(+) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Q \ \& \ \alpha \neq \beta \ \rightarrow$
$Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \alpha) \neq Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \beta))$

Da finnes det en Kη- -modellstruktur $M^* = \langle D^*, I^*, U^*, \sigma^*, \varphi^*, f^* \rangle$ basert på finstrukturerte utsagn for L der vi har:

(i) $D^* = D$ og $I^* = C$

(ii) Er $w \hat{e} C$ og $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$ gjelder:
$(M^*,w) \models \alpha \leftrightarrow (M,w) \models \alpha$

Det er to andre teoremer som er relatert til dem vi har bevist ovenfor som det kan være av interesse å nevne. Disse teoremene angår de krav vi stiller til modellstrukturene basert på henholdsvis unormale verdener og finstrukturerte utsagn.

Anta at M er en Kη- -modellstruktur basert på unormale verdener. Da vil M oppfylle det svake konjunksjonskravet. Men det er ikke noe i veien for å betrakte klassen av alle de Kη- -modellstrukturer basert på unormale verdener som oppfyller det strenge konjunksjonskravet. Denne mengden av modellstrukturer vil svare til mengden av Kη- -modellstrukturer basert på finstrukturerte utsagn som også oppfyller det strenge konjunksjonskravet.

Det skulle nå ikke være vanskelig å se hvordan man kan endre beviset for Teorem 9.2 slik at man får et bevis for den følgende sats:

Teorem 9.7 Anta L er et språk for doxastisk logikk. Anta $M=\langle D,C,I,q,V \rangle$ er en Kη- -modellstruktur for L basert på unormale verdener som oppfyller det strenge konjunksjonskravet. La Q være mengden av alle de formler $CFm(L(D))$ som ikke inneholder konstanter fra L. Anta M oppfyller kravet:

(+) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Q \ \& \ \alpha \neq \beta \ \rightarrow$
$Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \alpha) \neq Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \beta))$

Da finnes det en Kη-modellstruktur $M^* = \langle D^*, I^*, U^*, \sigma^*, \varphi^*, f^* \rangle$ basert på finstrukturerte utsagn for L som også oppfyller det strenge konjunksjonskravet og der vi har:

(i) $D^* = D$ og $I^* = C$

(ii) Er $w \hat{e} C$ og $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$ gjelder:
$(M^*,w) \models \alpha \leftrightarrow (M,w) \models \alpha$

Heller ikke skulle det være så vanskelig ved en nøyere inspeksjon av beviset for Teorem 9.1 å finne ut hvordan man kan endre det slik at det fremkommer et bevis for den følgende sats:

Teorem 9.8 Anta L er et språk for doxastisk logikk. Anta $M=\langle D,I,U \sigma,\varphi,f \rangle$ er en Kη- -modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn for L som oppfyller det strenge konjunksjonskravet. Da finnes det en Kη- - modellstruktur $M^* = \langle D^*,C^*,I^*,q^*,V^* \rangle$ basert på unormale verdener som også oppyller det strenge konjunksjonskravet og som dessuten oppfyller de følgende tre krav:

(i) $C^* = I$ og $D^*=D$

(ii) For alle $w \hat{e} I$ og for alle $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$ gjelder:
$(M^*,w) \models \alpha \leftrightarrow (M,w) \models \alpha$

(iii) La Q være mengden av alle de lukkede formler i L(D) som ikke innholder noen konstanter hentet fra L. Da oppfyller M^* det følgende krav:

© 2008 Morten Harboe Rognes

$$(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Q \ \& \ \alpha \neq \beta \rightarrow Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M^*,w) \models \alpha) \neq Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M^*,w) \models \beta))$$

Man ser at alle de teoremene vi har bevist i denne paragrafen er av samme type. De sier alle at dersom M er en modellstruktur av en hvis type finnes det en modellstruktur M' av en annen type som verifiserer de samme formlene. Fra dette følger at dersom en formel er gyldig i alle modeller av den andre typen vil formelen også være gyldig i alle modeller av den første typen. Er for eksempel en formel gyldig i alle Kη- -modellstrukturer basert på finstrukturerte utsagn som oppfyller det strenge konjunksjonskravet, samt kravet (+), kan man ved hjelp av Teorem 9.8 slutte at formelen også vil være gyldig i alle Kη- -modellstrukturer basert på finstrukturerte utsagn som også oppfyller det strenge konjunksjonskravet. Når det gjelder Teorem 9.7 berettiger denne satsen oss til å slutte det omvendte. En konsekvens av de teoremene vi har vist i denne paragrafen er derfor det følgende teorem:

Teorem 9.9 (Ekvivalensteorem): Anta L er et språk for doxastisk logikk. Anta α er en formel i L Da gjelder:

(i) α er gyldig i alle Kη+ (Kη, Kη-) -modellstrukturer basert på unormale verdener som oppfyller kravet (+) hvis og bare hvis α er gyldig i alle Kη+ (Kη, Kη-) -modellstrukturer basert på finstrukturerte utsagn.

(ii) α er gyldig i alle Kη- -modellstrukturer basert på unormale verdener som oppfyller kravet (+) samt det strenge konjunksjonskravet hvis og bare hvis α er gyldig i alle Kη- -modellstrukturer basert på finstrukturerte utsagn som oppfyller det strenge konjunksjonskravet.

Som man ser har vi i satsene har vi krevd at alle modellstrukturer basert på unormale verdener skal oppfylle kravet (+). Dette er essensielt i de satsene vi har bevist i denne paragrafen. Ingen av teoremene holder om vi fjerner denne forutsetningen. Men mengden av alle Kη+ (Kη, Kη-) -modellstrukturer basert på unormale verdener som oppfyller kravet (+) er naturligvis inkludert i mengden av alle Kη+ (Kη, Kη-) -modellstrukturer basert på unormale verdener . Det følgende teorem er derfor et korollar til teoremet ovenfor:

Teorem 9.10 : Anta L er et språk for doxastisk logikk. Anta α er en formel i L Da gjelder:

(i) Hvis α er gyldig i alle Kη+ (Kη, Kη-) -modellstrukturer basert på unormale verdener så er α gyldig i alle Kη+ (Kη, Kη-) -modellstrukturer basert på finstrukturerte utsagn.

(ii) Hvis α er gyldig i alle Kη- -modellstrukturer basert på unormale verdener som oppfyller kravet (+) samt det strenge konjunksjonskravet så er α gyldig i alle Kη- -modellstrukturer basert på finstrukturerte utsagn som oppfyller det strenge konjunksjonskravet.

Fra Teorem 9.10 og Teorem 6.2 følger lett den følgende sats:

Teorem 9.11 Anta L er et språk for doxastisk logikk og at α er en formel i L. Da gjelder:

(i) Kη[E1,E2 |- α så er α gyldig i alle Kη -modellstrukturer basert på finstrukturerte utsagn.

(ii) Kη-[E1,E2] |- α så er α gyldig i alle Kη- -modellstrukturer basert på finstrukturerte utsagn.

(iii) Kη-[E1,E2, TBF] |- α så er α gyldig i alle Kη- -modellstrukturer basert på

© 2008 Morten Harboe Rognes

finstrukturerte utsagn som oppfyller det strenge konjunksjonskravet

(iv) $K\eta+ \vdash \alpha$ så er α gyldig i alle $K\eta+$ -modellstrukturer basert på finstrukturerte utsagn.

La oss bemerke at vi senere, når vi tar for oss de fullstendighetsproblemene som oppstår i forbindelse med våre kalkyler. skal vise at det omvendte av punkt (iii) og (iv) i teoremet ovenfor holder.

§10 Relasjonelle modelstrukturer for den type språk vi har definert

Vi skal i denne paragrafen avgrense en tredje klasse av modellstrukturer for språk av den typen vi arbeider med i dette skriftet. Denne typen modellstrukturer har vi valgt å kalle relasjonelle modellstrukturer. Begrepet er avgrenset ved den følgende definisjon:

Definisjon 10. 1 Med en relasjonell modellstruktur for L, der L er et språk for doxastisk logikk, forstår vi en struktur $M=< D,I,<R;x>/x\hat{e}D/,\Phi,\varphi>$ der de enkelte komponentene oppfyller de følgende krav:

(i) D og I er ikke-tomme mengder

(ii) $\Phi : DxI \rightarrow Pt(CFm(L(D))$, med andre ord er Φ en funksjon som avbilder DxI inn i mengden av alle delmengder av CFm(L(D))

(iii) R;x for alle $x\hat{e}D$ er en relasjon over I, dvs. at R;x Inkl IxI om $x\hat{e}D$

(iv) φ er funksjon som oppfyller de følgende krav:

- (a) Er P et n-ært predikat i L har vi at $\varphi(P)\hat{e}$ (Pt(D^n))^I
- (b) Er P predikatet η har vi at $\varphi(\eta)\ \hat{e}$ (Pt(D))^I
- (c) $\varphi(=)\ \hat{e}(Pt(DxD))^I$ og vi krever at for alle $w\hat{e}D$ så har man at $\varphi(=)(w) = Mg(<x,y>: x,y\hat{e}D \ \&\ x=y)$
- (d) φ tilordner enhver konstant e i L(D) et objekt i D.

Når det gjelder funksjonen Φ er det viktig og merke seg at denne oppfyller det følgende krav:

Anta $<x,w>\hat{e}DxI$ og at $\alpha\hat{e}\Phi(x,w)$. Anta β er en formel i L(D) som er nøyaktig som α bortsett fra at vi har erstattet en eller flere forekomster av en konstant eller et navn a med en konstant b eller navn som har samme referanse som a. Da er også β et element i $\Phi(x,w)$.

Er $M=< D,I,<R;x>/x\hat{e}D/,\Phi,\varphi>$ en relasjonell modellstruktur for L som oppfyller kravet :

(+) $(Ax)(Aw)(x\hat{e}D \ \&\ w\hat{e}I \rightarrow (x\hat{e}\varphi(\eta)(w) \rightarrow (Ew')(<w,w'>\hat{e}R;x)))$

skal vi kalle M for en *seriell relasjonell modellstruktur* for L

Vi definerer hva som menes med at en formel $\alpha\hat{e}CFm(L(D))$ er sann i verdenen w i modellstrukturen M ved den følgende definisjon:

Definisjon 10.2 Anta $M=<D,I,<R;x>/x\hat{e}D>,\Phi,\varphi>$ er en relasjonell modellstruktur for L, der L er et språk for doxastisk logikk. Da er $(M,w) \models \alpha$, der $\alpha\hat{e}CFm(L(D))$, definert induktivt på lengden av α slik:

(i) Anta P er et n-ært predikat i L og at c;1,...,c;n er konstanter eller navn i L(D) Da setter vi:
$(M,w) \models P(c;1,...,c;n) \leftrightarrow <v(c;1),....,v(c;n)>\hat{e}\varphi(P)(w)$

© 2008 Morten Harboe Rognes

der $v(c;i)=\varphi(c;i)$ om c;i er en konstant i L(D) og $v(c;i) = n;-1(c;i)$ om a;i er et navn i L(D). (i =1,...,n). Denne klausulen kan også benyttes om P er identitetspredikatet eller predikatet η

(ii) Er $\alpha = \neg\beta$ setter vi:
$(M,w) \models \neg \beta \leftrightarrow \neg((M,w) \models \beta)$

(iii) Er $\alpha= (\beta\rightarrow\gamma)$ setter vi:
$(M,w) \models(\beta\rightarrow\gamma) \leftrightarrow ((M,w) \models \beta \rightarrow (M,w) \models \gamma)$
Er $\alpha= (Ax)\beta$ setter vi:

(iv) $(M,w) \models(Ax)\beta \leftrightarrow (Aa)(a\hat{e}D \rightarrow (M,w) \models \beta;x[n(a)])$

(v) $(M,w) \models T;c(\alpha) \leftrightarrow [\neg(v(c)\hat{e}\varphi(\eta)(w)) \& \alpha\hat{e}\Phi(v(c),w)]$ v
$[v(c)\hat{e}\varphi(\eta)(w) \& (Aw')(w'\hat{e}I \& <w,w'>\hat{e}R;v(c) \rightarrow (M,w') \models\alpha]$

Dermed er relasjonen $(M,w) \models \alpha$ fullstendig definert.

Vi definerer gyldighet på samme måte som tidligere. Er L et språk for doxastisk logikk og M en relasjonell modellstruktur for L kaller vi β for en M-instans α, der $\alpha\hat{e}Fm(L)$ hvis og bare hvis $\beta = \alpha;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n]$ for visse navn i;1,...,i;n forutsatt at x;1,...,x;n er de variabeltegnene som forekommer fri i α. Er $M=<D,I,<R;x>/x\hat{e}D/,\Phi,\varphi>$ en modellstruktur for L sier vi at α er gyldig i strukturen M hvis og bare hvis enhver M-instans β av α er sann i enhver mulig verden w i M, det vil si hvis og bare hvis vi har:

$(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (M,w) \models\beta)$ for enhver M-instans β av α.

En formel i L er gyldig hvis og bare hvis den er gyldig i enhver relasjonell modellstruktur for L.

I forbindelse meddet som er skrevet ovenfor er det viktig å bemerke at vi i definisjonen av en relasjonell modellstruktur krever at kravet (v) skal være oppfyllt. Det er imidlertid viktig å merke seg at man kan sløyfe dette kravet. Vi skal kalle relasjonelle modellstrukturer som oppfyller alle kravene bortsett fra dette for ikke-serielle relasjonelle modellstrukturer.

§11 Bevis for at de relasjonelle modellstrukturene er ekvivalente med modellstrukturene basert på finstrukturerte utsagn.

Vi skal først bevise to teoremer som viser en forbindelse mellom relasjonelle modellstrukturer og modelstrukturer basert på fin-strukturerte utsagn. Den første satsen er denne:

Teorem 11.1 Anta L er et språk for doxastisk logikk og at $M= <D,I,<R;x>/x\hat{e}D/,\Phi, \varphi>$ er en seriell relasjonell struktur for L. Da finnes det en $K\eta$+-modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn $M^* =<D^*,I^*,U^*,\sigma^*,\varphi^*,f^*>$ som oppfyller de følgende krav:

(i) $D= D^*$ og $I = I^*$

(ii) Er $\alpha\ \hat{e}Cfm(L(D))$ har vi for alle $w\hat{e}I$ at $(M,w) \models \alpha \leftrightarrow (M^*,w) \models \alpha$

Man ser ganske lett at denne satsen impliserer at dersom α er en formel som er gyldig i alle $K\eta$+-modellstrukturer for L basert på finstrukturerte utsagn, så vil formelen også være gyldig i alle relasjonelle modellstrukturer for L.

Det neste teoremet har som konsekvens det omvendte, nemlig at enhver formel i L som er gyldig i alle relasjonelle modellstrukturer for L også er gyldig i alle $K\eta$+-modellstrukturer for L basert på finstrukturerte utsagn. Satsen er :

© 2008 Morten Harboe Rognes

Teorem 11.2 Anta L er et språk for doxastisk logikk og at M =< D,I,U,σ,φ,f> er en Kη+-modellstruktur for L basert på finstrukturerte utsagn. Da finnes det en seriell relasjonell modellstruktur M*=<D*,I*,<R*;x>/xêD*/,Φ*,φ*> for L som oppfyller følgende krav:

(i) D= D* og I = I*

(ii) Er α êCfm(L(D)) har vi for alle wêI at (M,w) ⊨ α ↔ (M*,w) ⊨ α

Når det gjelder bevisene for disse to satsene skal vi først ta foross den siste satsen.

Bevis for Teorem 11.2: Anta L er et språk for doxastisk logikk og at (1) M =< D,I,U,σ,φ,f> er en Kη+-modellstruktur for L basert på finstrukturerte utsagn. Vi skal definere en relasjonell struktur M*=<D*,I*,<R*;x>/xêD*/, Φ*,φ*> for L som oppfyller kravene i satsen.

Vi setter først:

(2) D* = D og I* =I

Dermed er de to første komponentene i M* definert. Vi definerer dernest φ* i det vi setter:

(3.1) φ*(P)(w) = φ(P)(w) om P er et n-ært predikat i L og wêI

(3.2) φ*(η)(w) = φ(η)(w) om wêI

(3.3) φ*(=)(w) = φ(=)(w) om wêI.

Vi må imidlertid også definere φ* om e er en konstant i L. Dette gjøres ved:

(3.4) φ*(e) = (ix)(xêD & (Ew)(wêI & φ(e)(w)=x))

Man må i denne forbindelse huske på at dersom e er en konstant i L tilordner valuasjonsfunksjonen φ i en modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn e den samme referansen i alle mulige verdener. Siden dessuten mengden av mulige verdener er ikke-tom er definisjonen (3.4) berettiget. (3.1) - (3.4) definerer fullstendig funksjonen φ*.

Det gjenstår å definere de ymse R*;x ettersom x gjennomløper D samt funksjonen Φ*. Når det gjelder R*;x gjør vi dette slik:

Anta xêφ(η)(w) for noe wêI. Da setter vi:

(4.1) R*;x = Mg(<w;1,w;2>: w;2êSN(Mg(σ(y): <x,y>êφ(T)(w;1))) & xêφ(η)(w;1)

Er det ikke slik at xêφ(η)(w) for noe wêI setter vi:

(4.2) R*;x = ø

Dermed har vi definert R*;x for alle xêD=D*.

Det gjenstår nå bare å definere Φ*. Er <x,w>êDxI setter vi:

(5) Φ*(x,w) = Mg(α: αê CFm(L(D)) & <x,f(α)>êφ(T)(w))

Dermed har vi fullstendig definert strukturen M*=<D*,I*,<R*;x>/xêD*/,Φ*,φ*> gitt M.

Det er nødvendig å sjekke at Φ* oppfyller det kravet som er nevnt under punkt (iv) i Definisjon 10.1. Anta derfor at (5.1) αêΦ*(x,w) for vilkårlig <x,w>êDxI. Anta (5.2) at β er en formel i L(D) som er nøyaktig som α bortsett fra at vi har erstattet en eller flere forekomster av en konstant eller et navn a med en konstant b eller navn som har samme referanse som a. Fra (5.1) og (5) kan man slutte at (5.3) <x,f(α)>êφ(T)(w). Men fra (5.2) og punkt (iv) i Definisjon 8.1 følger at f(α) = f(β). Fra dette og (5.3) har vi <x,f(β)>êφ(T)(w). Sammen med (5) impliserer dette at βêΦ*(x,w). Dette viser at Φ* oppfyller kravet (iv) i Definisjon 10.1.

Det skulle være lett å se at strukturen M* oppfyller alle kravene i Definisjon 10.1. For å fullføre beviset for satsen er det derfor til strekkelig å vise at man har:

(+) (M*,w) ⊨ α ↔ (M,w) ⊨ α for alle αêCFm(L(D)) og alle wêI (= I*)

Denne påstanden bevises ved induksjon på lengden av α. Induksjonstrinnene for atomære formler og formler av typen ¬β, β→γ og (Ax)β er vesentlig trivielle. Man ser at disse trinnene holder fordi valuasjonsreglene for atomære formler, de setningslogiske konnektivene og

© 2008 Morten Harboe Rognes

allkvantoren er de samme i forbindelse med begge typene av modellstrukturer. Man ser dette når man sammenligner punkt (i) - (vi) i Definisjon 8.2 med punkt (i) - (iv) i Definisjon 10.2.

I lys av dette vil det derfor være tilstrekkelig å bevise

(++) $(M^*,w) \models T;c(\alpha) \leftrightarrow (M,w) \models T;c(\alpha)$ for alle $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$ og alle w gitt at (+) holder for alle kortere formler. I (++) er c enten en konstant eller et navn. I det følgende setter vi $v^*(c) = \varphi^*(c)$ om c er en konstant i L og $v^*(c) = n;\text{-}1(c)$ om c er et navn. Tilsvarende setter vi om $v(c) = \varphi(c)(w)$ om c er en konstant og $v(c) = n;\text{-}1(c)$ om c er et navn. Man ser da lett i lys av Definisjon 8.1 og Definisjon10.1 at c har den samme referanse i modellen M^* såvel som i modellen M, med andre ord at vi har: $v^*(c) = v(c)$. Man ser dette umiddelbart fra (3.4) ovenfor, siden navnene og navngivningsfunksjonen n er identiske i de to modellstrukturene. Anta derfor for vilkårlig α og w at $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$ og $w \hat{e} I$:

For å bevise (++) skiller vi mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): $\neg(v^*(c) \hat{e} \varphi^*(\eta)(w))$. Da har vi i lys av Definisjon 10.2 og Definisjon 8.2

(6) $(M^*,w) \models T;c(\alpha) \leftrightarrow \alpha \hat{e} \Phi^*(v(c),w)$
$\leftrightarrow \langle v(c), f(\alpha)\rangle \hat{e} \varphi(T)(w)$ I kraft av (5) ovenfor.
$\leftrightarrow (M,w) \models T;c(\alpha)$

Tilfelle (ii): $v^*(c) \hat{e} \varphi^*(\eta)(w)$. Da har vi $v(c) \hat{e} \varphi(\eta)(w)$ i lys av (3.2). Dessuten har vi ved hjelp av Definisjon 10.2:

(7) $(M^*,w) \models T;c(\alpha) \leftrightarrow (Aw')(w' \hat{e} I \,\&\, \langle w,w'\rangle \hat{e} R^*;v(c) \rightarrow (M^*,w') \models \alpha$
$\leftrightarrow \{w': \langle w,w'\rangle \hat{e} R^*;v(c)\}$ Inkl $\{w': (M^*,w') \models \alpha\}$

Nå har man i lys av definisjonen av $R^*;x$, (4.1), at:

(8) $\{w': \langle w,w'\rangle \hat{e} R^*;v(c)\} = \{w': w' \hat{e} SN(Mg(\sigma(y): \langle v(c),y\rangle \hat{e} \varphi(T)(w)))\}$
$= SN(Mg(\sigma(y): \langle v(c),y\rangle \hat{e} \varphi(T)(w)))$

Nå har vi i kraft av induksjonshypotesen og fordi M er en normal modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn at

(9) $\{w': (M^*,w') \models \alpha\} = \{w': (M,w') \models \alpha\}$ & $\{w': (M,w') \models \alpha\} = \sigma(f(\alpha))$

Det følger fra (7) - (9) at:

(10) $(M^*,w) \models T;c(\alpha) \leftrightarrow SN(Mg(\sigma(y): \langle v(c),y\rangle \hat{e} \varphi(T)(w)))$ Inkl $\sigma(f(\alpha))$

Vi setter per definisjon

(10.1) $Tr;(x,w) = Mg(y: y \hat{e} U \,\&\, \langle x,y\rangle \hat{e} \varphi(T)(w))$.

$Tr;(x,w)$ representerer da trosfeltet til individet x i verdenen w i modellstrukturen M. Siden M er en $K\eta+$ -modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn for L har vi at $Tr;(x,w)$ i lys av definisjonene som ble gitt i §8 er strengt konjunktivt lukket. Dette innebærer at vi har:

(11) $u \hat{e} U \,\&\, \sigma(u) = SN(Mg(\sigma(y): \langle x,y\rangle \hat{e} \varphi(T)(w))) \rightarrow u \hat{e} Tr;(x,w)$

for alle $x \hat{e} D$ og $w \hat{e} I$. Nå har man at σ: U - (på) -> Pt(I). Siden

$SN(Mg(\sigma(y): \langle v(c),y\rangle \hat{e} \varphi(T)(w)))$ Inkl I følger det at det finnes $u;0 \hat{e} U$ slik at

(11.1) $\sigma(u;0) = SN(Mg(\sigma(y): \langle v(c),y\rangle \hat{e} \varphi(T)(w)))$. Fra dette og (11) følger at

(11.2) $\sigma(u;0)$ Inkl $Tr;(v(c),w)$. Anta nå (11.3) $(M^*,w) \models T;c(\alpha)$. Da følger ved hjelp av (10) og (11) at:

(11.4) $\sigma(u;0)$ Inkl $\sigma(f(\alpha))$. Men fra dette og (11.2) følger videre, siden trosfeltet til $v(c)$ i verdenen w er rasjonelt organisert, vi har jo siden $v(c) \hat{e} \varphi(\eta)(w)$ at det er lukket under logisk konsekvens, at $f(\alpha) \hat{e} Tr;(v(c),w)$. Fra dette følger ved hjelp av definisjonen (10.1) at $\langle v(c),f(\alpha)\rangle \hat{e} \varphi(T)(w)$ og derfor at

(12) $(M,w) \models T;c(\alpha)$

i lys punkt (vii) i Definisjon 8.2. Vi har dermed bevist den ene halvdelen av (++) i dette tilfelle, nemlig:

$(M^*,w) \models T;c(\alpha) \rightarrow (M,w) \models T;c(\alpha)$

© 2008 Morten Harboe Rognes

La oss så bevise den andre halvdelen: Anta nå at (12) holder med det for øye å vise at (M*,w) ⊨ T;c(α). Fra (12) følger ved hjelp av Definisjon 8.2 at:

(13) <v(c), f(α)> ê φ(T)(w). Det vil være nok å vise at:

(14) (Aw')(<w,w'>êR*;v(c) → (M*,w') ⊨ α)

Anta derfor for vilkårlig w' at <w,w'>êR*;v(c). I lys av definisjonen av R* innbærer dette, siden vi forutsetter at v(c)êφ(η)(w) at (15) w'êSN(Mg(σ(y): <v(c),y>êφ(T)(w))).
Nå har vi fra dette og (13) w'êσ(f(α)). Siden M er en normal modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn har vi σ(f(α)) = Mg(w: (M,w) ⊨ α) Fra dette og induksjonshypotesen, Mg(w: (M,w) ⊨ α) = Mg(w: (M*,w) ⊨ α) og (13) følger så (M*,w') ⊨ α. Dette viser at (14) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Vi går nå over til beviset for det første av teoremene som ble nevnt i denne paragrafen, nemlig Teorem 11.1:

Bevis for Teorem 11.1: Anta L er et språk for doxastisk logikk. Anta videre at M= <D,I, <R:x>/xêD/, Φ,φ> er en relasjonell modellstruktur for L. Vi skal konstruere en Kη+-modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn for L, M* =<D*, I*,σ*,U*,φ*,f*>, som oppfyller kravene i teoremet. Vi gjør dette ved først å definere D* og I* ved simpelthen å sette per definisjon: (1) D* = D og I*=I.

For å definere de andre komponentene i M* på en hensiktsmessig måte er det imidlertid nødvendig å være nøyaktig med noen detaljer som har med konstanter og navn å gjøre. Språket L kan godt inneholde konstanter, men det inneholder ikke navnene på elementene i D. L(D) er språket vi får når L utvides med disse spesielle navn-konstantene. Når det gjelder φ* skal vi gi en fullstendig definisjon av den senere i beviset. Men på akkurat dette punkt er det hensiktsmessig å definere den for konstantene i L. Vi setter:

(2.1) φ*(c)(w) = φ(e) om wêI*=I. Man ser da at enhver konstant i L i prinsippet har den samme referanse i modellene M og M*. I lys av (1) ser man også at L(D) er identisk med L(D*). La nå X være den delmengden av CFm(L(D)) som bare inneholder formler som er fri for konstanter i L. En formel som er med i X kan godt inneholde navn, for navn er spesielle konstanter som ikke forekommer i L. Vi skal definere en funksjon ξ som avbilder CFm(L(D)) på X.

Anta αêCFm(L(D)) og at c;1,....,c;n er de konstantene i L som forekommer i den. La α' være den formelen som fremkommer når vi, for i=1,...,n (n>=0), erstatter alle forekomster av c;i med navnet på det objektet i D som konstanten c;i har som referanse. Da setter vi ξ(α) = α'. Det er klart at ξ definert på denne måten avbilder CFm(L(D)) *inn i* X. Vi må imidlertid også godtgjøre at den avbilder CFm(L(D)) *på* X. Dette er imidlertid opplagt fordi ξ åpenbart avbilder enhver konstantfri formel på seg selv. Er derfor αêX har vi at ξ(α)=α. Vi sier at to formler α,β i CFm(L(D)) er ξ- ekvivalente hvis og bare hvis ξ(α) = ξ(β). Man ser umiddelbart at denne relasjonen er en ekvivalensrelasjon. Gitt modellstrukturen M ser man også lett at vi må ha (M,w) ⊨ α ↔ (M,w) ⊨ β dersom ξ(α)= ξ(β) og α,βêCFm((L(D)).

Vi går nå videre med konstruksjonen av modellstrukturen M*. Først definerer vi U1 ved:

(3) U1 = Mg(x: (Eα)(αêCFm(L(D)) & x= Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ α))

Man ser fra denne definisjonen at U1 Inkl Pt(I) = Pt(I*). Videre definerer vi U1* ved:

(4) U1* = Mg(<Mg(w: wêI & (M,w) ⊨ α), ξ(α)> : αêCfm(L(D)))

Til slutt setter vi (5) U2 = Pt(I) - U1.

Gitt disse forberedelsene kan vi nå definere mengden av utsagn U* i modellstrukturen M* ved:

© 2008 Morten Harboe Rognes

(6) $U^* = U1^* \cup U2$.

Det skulle være åpenbart at de to mengdene U1* og U2 er disjunkte. Den første er en mengde av ordnete par mens den andre mengden er en mengde av delmengder av mulige verdener.

Det neste skritt er å definere sannhetsfunksjonen σ^* i modellen M*. Dette gjør vi slik:

(7.1) Er $x \in U1^* \rightarrow \sigma^*(x) = (x);1$ (dvs. den første komponenten i paret x)

(7.2) Er $x \in U2 \rightarrow \sigma^*(x) = x$

Det er også nødvendig å definere funksjonen f*. Vi setter:

(8) $f^*(\alpha) = \langle Mg(w: w \in I \ \& \ (M,w) \models \alpha), \xi(\alpha) \rangle$ om $\alpha \in CFm(L(D))$.

Man ser ganske lett i lys av bemerkningene ovenfor at f* definert på denne måten oppfyller kravene som er satt i siste punkt i Definisjon 8.1. Begrenser man seg til formlene i L(D) som ikke inneholder noen av konstantene i L, ser man lett at funksjonen er en-entydig. Man ser også at $f^* : CFm(L(D)) \rightarrow U1^*$ Inkl U*.

For å fullstendiggjøre konstruksjonen av modellstrukturen M* gjenstår det å fullføre definisjonen av φ^*.

Er P et n-ært predikat i L setter vi:

(9.1) $\varphi^*(P)(w) = \varphi(P)(w)$ om $w \in I$

Videre setter vi:

(9.2) $\varphi^*(=)(w) = \varphi(=)(w)$ om $w \in I$ og

(9.3) $\varphi^*(\eta)(w) = \varphi(\eta)(w)$ om $w \in I$

Det gjenstår å definere $\varphi^*(T)$ slik at $\varphi^*(T)(w)$ Inkl $D^* \times U^*$ om $w \in I$. Dette gjør vi på følgende måte:

Anta $w \in I$, $x \in D$ og $u \in U^*$. Er $x \in \varphi(\eta)(w)$ setter vi:

(10.1) $\langle x,u \rangle \in \varphi^*(T)(w) \leftrightarrow Mg(w': w' \in I \ \& \ \langle w,w' \rangle \in R;x)$ Inkl $\sigma^*(u)$

Har vi derimot $\neg(x \in \varphi(\eta)(w))$ setter vi:

(10.2) $\langle x,u \rangle \in \varphi^*(T)(w) \leftrightarrow u \in U1^* \ \& \ (u);2 \in \Phi(x,w)$

Dermed har vi fullført konstruksjonen av modellstrukturen M*

Det gjenstår nå å bevise tre ting. For det første må vi vise, dersom $x \in \varphi^*(\eta)(w)$, at $Mg(u: \langle x,u \rangle \in \varphi(T)(w))$ er konsistent, deduktivt lukket og strengt konjunktivt lukket, samt at den inneholder alle logiske sannheter. Man må i denne forbindelse se på kommentarene i §10. Dette skulle imidlertid være opplagt i lys av (10.1). Det andre er at vi må vise at

(+) $(M^*,w) \models \alpha \leftrightarrow (M,w) \models \alpha$ om $\alpha \in CFm(L(D))$ og $w \in I$

Det tredje er at vi må vise at modellstrukturen M* er normal, dvs. at vi har:

(++) $(M^*,w) \models \alpha \leftrightarrow w \in \sigma^*(f^*(\alpha))$ for alle $w \in I = I^*$ og $\alpha \in CFm(L(D))$

Vi tar først for oss (+). Dette bevises ved induksjon på lengden av α. Induksjonstrinnene for atomære formler, de setningslogiske konnektivene og allkvantoren er elementære og overlates til leseren. Det er ganske opplagt at disse trinnene lar seg gjennomføre i lys av måten φ^* er definert, Definisjon 8.2 og Definisjon 10.2. Vi ser derfor kun på induksjonstrinnet for operatoren T. Det vil være nødvendig å vise, gitt induksjonshypotesen at

(*) $(M^*,w) \models T;c(\alpha) \leftrightarrow (M,w) \models T;c(\alpha)$ om $w \in I$, $\alpha \in CFm(L(D))$ og c enten er et navn eller en konstant i L(D).

Vi tar først for oss kondisjonalen mot høyre i (*)

Anta (11) $(M^*,w) \models T;c(\alpha)$. Vi setter $v^*(c) = \varphi^*(c)(w)$ om c er en konstant og $v^*(c) = n;-1(c)$ om c er et navn i L(D). Tilsvarende setter vi $v(c) = \varphi(c)$ om c er en konstant og $v(c) = n;-1(c)$ om c er et navn i L(D). Fra det som tidligere er sagt følger da $v^*(c) = v(c)$.

Vi skiller mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): $\neg(v(c) \in \varphi(\eta)(w))$. I så fall har vi fra (11) at $\langle v(c), f^*(\alpha) \rangle \in \varphi^*(T)(w)$. Fra dette og (10.2) følger $(f^*(\alpha));2 \in \Phi(v(c),w)$. Men siden $(f^*(\alpha));2 = \xi(\alpha)$ ifølge definisjonen av f*, (8)

© 2008 Morten Harboe Rognes

ovenfor, følger det at $\xi(\alpha) \hat{e} \Phi(v(c),w)$. Men i lys av de kravene vi stilte til Φ i Definisjon 10.1 og definisjonen som vi ga ovenfor av funksjonen ξ, følger det at $\alpha \hat{e} \Phi(v(c),w)$. Fra dette følger ved hjelp av Definisjon 10.2 at $(M,w) \models T;c(\alpha)$, som er det vi ønsker.
Tilfelle (ii): $v(c) \hat{e} \varphi(\eta)(w)$. Da har vi far (11) og Definisjon 8.2 at $<v(c), f^*(\alpha)> \hat{e} \varphi^*(T)(w)$. herav følger så ved hjelp av (10.1) at:

(12) $Mg(w': w' \hat{e} I \ \& <w,w'> \hat{e} R;v(c)) \text{ Inkl } \sigma^*(f^*(\alpha))$

Siden $f^*(\alpha) = <Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \alpha), \xi(\alpha)>$ kan vi ikke ha $f^*(\alpha) \hat{e} U2$. Det følger at $f^*(\alpha) \hat{e} U1^*$ siden U1* og U2 er disjunkte. Vi har derfor i lys av (7.1) og (7.2) at
(13) $\sigma^*(f^*(\alpha)) = (f^*(\alpha));1 = Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \alpha)$. Fra dette og (12) følger:
(14) $Mg(w': w' \hat{e} I \ \& <w,w'> \hat{e} R;v(c)) \text{ Inkl } Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \alpha)$ og herav:
(15) $(Aw')(<w,w'> \hat{e} R;v(c) \rightarrow (M,w') \models \alpha)$. Men fra dette og Definisjon 10.2 følger det vi ønsker: $(M,w) \models T;c(\alpha)$.

Dette viser at kondisjonalen mot høyre i (*) holder. La oss så ta for oss kondisjonalen den andre veien. Anta (16) $(M,w) \models T;c(\alpha)$. Igjen skiller vi mellom to tilfelle:
Tilfelle (i): $\neg(v(c) \hat{e} \varphi(\eta)(w))$. Da har vi fra (16) i lys av Definisjon 10.2 at

(17) $\alpha \hat{e} \Phi(v(c),w)$. På grunn av de krav vi stilte til Φ i en relasjonell modellstruktur, jmf. Definisjon 10.1 følger det videre at $\xi(\alpha) \hat{e} \Phi(v(c),w)$. Men $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$ derfor har vi $f^*(\alpha) \hat{e} U1^*$ Inkl U^*. Det følger at $(f^*(\alpha));2 = \xi(\alpha) \hat{e} \Phi(v(c),w)$. Ved hjelp av (10.2) følger da, siden $v(c) = v^*(c)$ at $<v^*(c), f^*(\alpha)> \hat{e} \varphi^*(T)(w)$ og derfor, som vi ønsker, at $(M^*,w) \models T;c(\alpha)$ ved hjelp av Definisjon 8.2.
Tilfelle (ii): $v(c) \hat{e} \varphi(\eta)(w)$. Da følger fra (16) og Definisjon 10.2 at

$(Aw')(<w,w'> \hat{e} R;v(c) \rightarrow (M,w') \models \alpha)$

Dette impliserer : (18) $Mg(w' : <w,w'> \hat{e} R;v(c)) \text{ Inkl } Mg(w': (M,w') \models \alpha)$. Men siden $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$ har vi $f^*(\alpha) \hat{e} U1^*$ Inkl U^* og derfori lys av (7.1) og (8) at $\sigma^*(f^*(\alpha)) = Mg(w: (M,w) \models \alpha)$. Fra dette og (18) kan man slutte:

(19) $Mg(w' : <w,w'> \hat{e} R;v(c)) \text{ Inkl } \sigma^*(f^*(\alpha))$

Fra (10.1) og (19) følger så: $<v(c),f^*\alpha)> \hat{e} \varphi^*(T)(w)$. Herav følger så ved hjelp av Definisjon 8.2 det vi ønsker, nemlig: $(M^*,w) \models T;c(\alpha)$.

Dermed har vi levert et fullstendig bevis for (*).
Det gjenstår bare å vise at (++) holder. Anta $w \hat{e} I = I^*$ og $\alpha \hat{e} CFm(L(D))$. Da har vi ved hjelp av (7.1) og (8) at $w \hat{e} \sigma^*(f^*(\alpha)) \leftrightarrow (M,w) \models \alpha$. Men ved hjelp av (*), som vi nå har bevist, følger det at $w \hat{e} \sigma^*(f^*(\alpha)) \leftrightarrow (M^*,w) \models \alpha$. Dette avslutter vårt bevis for Teorem 11.1. **QED.**

Ovenfor har vi altså vist at dersom vi har for oss en relasjonell modell for L som oppfyller kravene ovenfor kan vi alltid konstruere en modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn M* som verifiserer de samme formlene. Vi sondret imidlertid mellom to typer av relasjonelle strukturer. Den ene typen er den vi har arbeidet med ovenfor. Det var relasjonelle modellstrukturer som oppfylte kravet:

$(Ax)(Aw)(x \hat{e} \eta(w) \rightarrow (Ew')(w' \hat{e} I \ \& \ wR;xw'))$

Vi kalte relasjonelle modellstrukturer for L som oppfylte dette kravet for serielle.

I avsnittet om modellstrukturer basert på finstrukturerte utsagn betraktet vi klassen av de $K\eta$- -modellstrukturene som i tillegg til å oppfylle konjunksjonskravet også oppfylte det strenge konjunksjonskravet. Saken er nå at denne klassen av strukturer i en viss forstand svarer fullstendig til klassen av relasjonelle strukturene hvor vi ikke har pålagt strukturene noen ytterligere krav.. Gitt en relasjonell modellstruktur for L kan vi vi konstruere en $K\eta$- -modellstruktur som oppfyller det strenge konjunksjonskravet som verifiserer de samme formlene og omvendt.

Mer presist kan disse to satsene formuleres slik:

© 2008 Morten Harboe Rognes

Teorem 11.3 Anta L er et språk for doxastisk logikk og at M= <D,I,<R;x>/xêD/, Φ, φ> er en relasjonell struktur for L. Da finnes det en Kη-modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn M* =< D*,I*,U*,σ*,φ*,f*> som i oppfyller det strenge konjunksjonskravet, der vi har:

(i) D= D* og I = I*

(ii) Er α êCfm(L(D)) har vi for alle wêI at (M,w) ⊨ α ↔ (M*,w) ⊨ α

Teorem 11.4 Anta L er et språk for doxastisk logikk og at M =< D,I,U,σ,φ,f> er en Kη--modellstruktur for L basert på finstrukturerte utsagn som oppfyller det strenge konjunksjonskravet. Da finnes det en relasjonell modellstruktur M*=<D*,I*,<R*;x>/xêD*/, Φ*,φ*> for L som oppfyller følgende krav:

(i) D= D* og I = I*

(ii) Er α êCfm(L(D)) har vi for alle wêI at (M,w) ⊨ α ↔ (M*,w) ⊨ α

Vi gir ikke detaljerte bevis for disse to teoremene, siden det er temmelig enkelt å endre bevisene for Teorem 11.1 og Teorem 11.2 slik at man får bevis for henholdsvis Teorem 11.3 og Teorem 11.4.

§12 Oppsummering når det gjelder det gjelder modellteoriene for doxastisk logikk

I dette avsnittet skal vi forsøke å gi en oversikt over det materiale som så langt har blitt presentert.

Anta L er et språk for doxastisk logikk slik vi har definert det i §2. For denne typen av språk har vi hovedsakelig presentert tre hovedtyper av modellstrukturer. For det første har vi modellstrukturer basert på unormale verdener for L. Disse ble innført i §4. For det andre har vi modellstrukturer basert på finstrukturerte utsagn. Denne typen strukturer ble innført og eksakt definert i §8. For det tredje har vi det vi kalte relasjonelle modellstrukturer for L. Disse ble innført og presist definert i §10.

Når det gjelder *modellstrukturene for L basert på unormale verdener* betraktet vi der i all hovedsak fire typer: (i) Klassen av alle Kη+-modellstrukturer for L basert på unormale verdener. Denne klassen skal vi betegne meda*. (ii) Klassen av alle Kη- modellstrukterer for L basert på unormale verdener som oppfyller det strenge konjunksjonskravet. Denne modellklassen skal vi i akkurat dette avsnittet betegne med b*. (iii) Klassen av alle Kη-modellstrukturer for L basert på unormale verdener. Vi betegner denne klassen med c*. (iv) Klassen av alle Kη- -modellstrukturer for L basert på unormale verdener. Denne mengden skal vi betegne med d*.

Alle disse klassene ble presist definert i §4. Imidlertid så vi §9 på visse delmengder av disse mengdene. Anta M =<D,C,I,q,V> er en modellstruktur for L basert på unormale verdener. Man kan da kreve at den skal oppfylle følgende krav:

(+) La Q være mengden av alle de lukkede formler i L(D) som ikke innholder noen konstanter hentet fra L. Da gjelder:

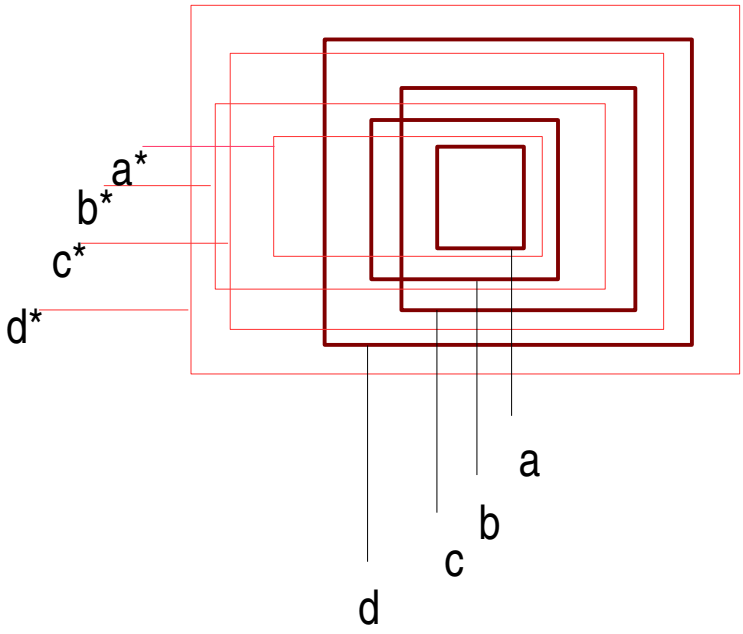
(Aα)(Aβ)(α,βêQ & α≠β →

Mg(w: wêI & (M*,w) ⊨ α) ≠ Mg(w: wêI & (M*,w) ⊨ α))

Tar vi nå for oss de fire modellklassene a*, b*, c* og d* og begrenser oss til i hver klasse bare å betrakte de strukturene som oppfyller (+). Får vi ytterligere fire klasser av modellstrukturer. Vi betegner dem med henholdsvis a, b, c og d. For eksempel vi b da være mengden av alle de

© 2008 Morten Harboe Rognes

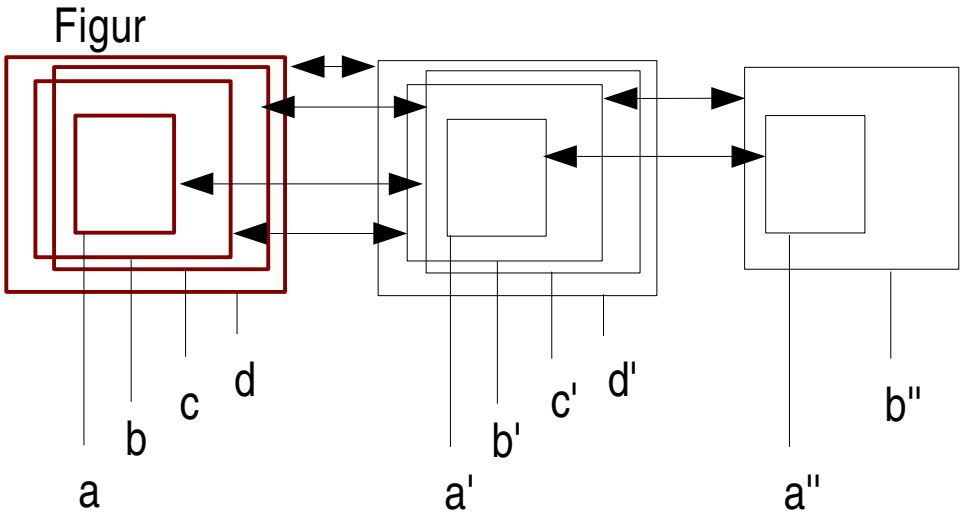
modellstrukturene i b* som oppfyller kravet ovenfor. Inklusjonsforholdene mellom de diverse modellklassene vi nå har beskrevet kan anskueliggjøres ved den følgende figur:



Så mye når det gjelder oversikten over forskjellige typer av modellstrukturer for L som er basert på unormale verdener.

Bokstav	Mengde av modellstrukturer for L
a	Mengden av Kη+ -modellstrukturer basert på unormale verdener for L som oppfyller (+)
b	Mengden av Kη- -modellstrukturer for L basert på unormale verdener som oppfyller (+), og det strenge konjunksjonskravet
c	Mengden av Kη-modellstrukturer for L basert på unormale verdener som oppfyller (+)
d	Mengden av Kη- -modellstrukturer for L basert på unormale verdener som oppfyller (+)
a'	Mengden av Kη+ -modellstrukturer for L basert på finstrukturerte utsagn
b'	Mengden av Kη- -modellstrukturer for L basert på finstrukturerte utsagn og som oppfyller det strenge konjunksjonskravet.
c'	Mengden av Kη -modellstrukturer for L basert på finstrukturerte utsagn
d'	Mengden av Kη- -modellstrukturer for L basert på finstrukturerte utsagn
a''	Mengden av serielle relasjonelle modellstrukturer for L
b''	Mengden av relasjonelle modellstrukturer for L

© 2008 Morten Harboe Rognes



I §8 innførte vi også en annen type strukturer, nemlig det vi kalte *modellstrukturer for L basert på finstrukturerte utsagn*. I forbindelse med dem betraktet vi også fire klasser som i en viss forstand korresponderte til klassene a* - d* og a - d. Vi betraktet: (i) Klassen av Kη+-modellstrukturer for L basert på finstrukturerte utsagn. Vi betegner denne mengden med a'. (ii) Klassen av Kη- -modellstrukturer for L basert på finstrukturerte utsagn som oppfylte det strenge konjunksjonskravet. Denne mengden betegner vi med b'. (iii) Klassen av Kη-modellstrukturer for L basert på finstrukturerte utsagn. Denne mengden betegner vi med c'. (iv) Endelig betraktet vi klassen av alle Kη- -modellstrukturer for L basert på finstrukturerte utsagn. Denne mengden betegner vi med d.

Ekvivalensteoremet, Teorem 9.9, som vi viste i §9 impliserer da med den notasjonen vi nå har innført at en formel α i L er gyldig i alle modeller i a (b, c, d) hvis og bare hvis den er gyldig i alle modeller i klassen a'(b', c', d'). Disse påstandene er forsøkt anskueliggjort på figuren. De enkelte boksene som er merket a,b, c ... a',b', c' etc representerer de forskjellige modell klassene som vi har omtalt. En dobbeltpil som mellom to slike bokser betyr at en formel α i L er gyldig i alle modellstrukturene representert ved den ene boksen hvis og bare hvis den er gyldig i alle modellstrukturene representert ved den andre boksen.

I §10 innførte vi ytterligere en klasse med modellstrukturer, nemlige de relasjonelle modellstrukturene for L. I forbindelse med dem sondret vi mellom to klasser: (i) de relasjonelle modellene som oppfylte kravet:

| (++) For alle xêD og alle wêI har man at dersom xêφ(η)(w) så gjelder: (Ew')(<w,w'>eR;x) |

Vi kalte dem for serielle. Vi betegner klassen av alle slike relasjonelle modellstrukturer med a". Den andre klassen av relasjonelle modellstrukturer var dem som ikke ble pålagt noen spesielle krav. Vi betegner denne klassen med b".

En viktig sats som følger fra teoremene vi beviste i §11 er at enhver formel i α som er gyldig i enhver modellstruktur i a' (b') også er gyldig i enhver modellstruktur i klassen a" (b"). Disse resulatene er anskuelig gjort i høyre del av det nederste diagrammet på forrige side.

© 2008 Morten Harboe Rognes

I det hele tatt kan man si at diagrammet her, og tabellen som gir en oversikt over de forskjellige modellstrukturklassene vi har betraktet, sammenfatter de viktigste resultatene vi har kommet til så langt.

§13 Innledende bemerkninger om fullstendighetsbeviset for Kη+. Henkin-bevis

Vi har vist at alle teoremer i Kη+ er gyldige i alle Kη+-modeller for L basert på mulige verdener. Vi har også vist at teoremer i dette system er gyldige at alle Kη+-modeller basert på finstrukturerte utsagn og i alle relasjonelle modeller. En tilsvarende gyldighetsats gjelder for systemet Kη-[E1,E2,TBF]. Derimot er ikke alle teoremer i Kη eller Kη- gyldige i alle relasjonelle modeller hva enten de er serielle eller ikke. Det er fordi TBF er gyldig i alle relasjonelle modeller. Men denne formelen er neppe utledbar i Kη eller Kη- eller disse systemene dersom E1 og E2 legges til.

I det følgende skal vi vise at Kη+ og Kη-[E1,E2,TBF] er fullstendig med hensyn på henholdsvis klassen av serielle relasjonelle modeller og klassen av alle relasjonelle modeller. I lys av resultatene som vi gjorde rede for i forrige paragraf følger det at Kη+ er fullstendig med hensyn på klassen av alle Kη+-modellstrukturer basert på finstrukturerte utsagn og alle Kη+-modellstrukturer basert på unormale verdener. Tilsvarende påstander gjelder for systemet Kη-[E1,E2,TBF].

De fullstendighetsbevis vi skal presentere er temmelig ordinære Henkin bevis. Vi skal vise, gitt en mengde av lukkede formler Δ i L som er konsistent med hensyn på S (der S enten er Kη+ eller Kη-[E1,E2,TBF]) , hvordan vi kan konstruere en relasjonell modell (ikke-seriell modell) M der der det finnes en verden w, blandt verdenene i M, hvor alle formlene i Δ er sanne. Dette skjer ved at vi først utvider språket med det vi her kaller spesielle konstanter. Dernest viser vi hvordan Δ i dette utvidet språket konsistent kan gis det vi kaller E-egenskapen. Endelig vil den mengden som resulterer på denne måten utvides til en maksimalt konsistent mengde Γ som også vil ha E-egenskapen. Vi viser så hvordan man med utgangspunkt i denne maksimalt konsistente mengden Γ kan konstruere et tre av underordnete maksimalt konsistente mengder for hver konstant a som representerer et element med et rasjonelt trosfelt. På basis av dette treet konstruerer vi så en relasjonell modell hvor alle formlene i Δ kommer ut som sanne i den verdenen som svarer til Γ. Dette er hovedtrekkene i beviset.

Når det gjelder konstruksjonen av de underordnete mengdene i det nevnte tre av maksimalt konsistente mengder gjør vi oppmerksom på at vårt bevis på alle vesentlige punkter følger fremstillingen gitt i Hughes og Cresswell [1],s. 164- 168. Visse deler av vårt bevis kan nærmest karakteriseres som "avskrift" av tilsvarende partier i deres bevis. Men ikke alt. Hughes og Cresswell beviser tross alt fullstendighet for visse predikatlogiske versjoner av de kjente modallogiske systemene T, S4 og S5. De arbeider derfor bare med én alternativrelasjon og ikke et knippe av slike relasjoner indeksert på mengden av individer i modellen. Dessuten bruker ikke deteknikken med spesielle konstanter av den typen vi innfører. Denne teknikken har vi tatt fra det bevis for fullstendigheten til første-ordens predikatlogikk som er fremstilt i Shoenfield [1] , s. 43 -48.

I det følgende er hendelsesforløpet dette: I §14 innfører vi det vi kaller spesielle konstanter assosiert med eksistensielle formler. I §15 defineres rigorøst begrepet 'maksimalt konsistent mengde' og vi gir et bevis for Lindenbaums lemma som sier at enhver konsistent mengde kan utvides til en som er maksimalt konsistent. Dessuten beviser vi et teorem som angir en rekke viktige, men elementære egenskaper til maksimalt konsistente mengder. I §16 har vi samlet sammen en rekke hjelpesetninger som benyttes i beviset og som vi finner det

© 2008 Morten Harboe Rognes

hensiktsmessig å bevise her. Endelig gjennomfører vi i §17 konstruksjonen av den trestrukturen som ble nevnt ovenfor og i §18 fullfører vi beviset.

§14 Spesielle konstanter

Vi tar vårt utgangspunkt i et språk L for doxastisk logikk slik vi har beskrevet det i §2. For hver formel av typen (Ex)α i L innfører vi en tellbart uendelig mengde med spesielle konstanter som er spesielt forbundet med formelen (Ex)α. Vi bruker en bestemt notasjon for disse konstantene og de skal være uttrykkene i den følgende rekke:

c;1((Ex)α), c;2((Ex)α), c;3((Ex)α), ...

Vi antar selvfølgelig at alle disse spesielle konstantene ikke har noen elementer felles med de konstantene som allerede foreligger, eller inngår, i L. Vi kaller den n'te konstanten i rekken ovenfor for den n'te spesielle konstanten for formelen (Ex)α. Man bemerker selvfølgelig at spesielle konstanter bare innføres i forbindelse med eksistensielle formler i L, dvs. formler av typen (Ex)α.

Vi skal nå konstruere en sekvens av utvidelser av språket L. Denne rekken av utvidelser av L betegnes med L;0, L;2, ... , L;n, ... Vi lar L;0 være L. L utvidet med spesielle konstanter for alle formler av typen (Ex)α som inngår i L betegner vi med L;1. La oss så anta at vi har konstruert L;n. Da er L;(n+1) språket L;n utvidet med alle spesielle konstanter for alle formler av typen (Ex)α som inngår i L;n. Man ser at alle formlene i et språk på et bestemt nivå i denne rekken er strengt inkludert blandt formlene i språket på det etterfølgende nivå. Tilslutt lar vi L;c være det språket vi får når L utvides med alle de spesielle konstantene som inngår i hvert språk i rekken <L;n>/nêN/

Man legger merke til at enhver formel i L;c av typen (Ex)α kan entydig tilordnes en tellbart uendelig mengde med spesielle konstanter, nemlig de diverse c;1((Ex)α), c;2((Ex)α), c;3((Ex)α), ... osv. Disse konstantene vil også høre med i L;c. Man legger også merke til at en spesiell konstant som er med i språket L;n også vil være med i alle språk som kommer senere i rekken <L;n>/nêN/.

Med *rangen til en spesiell konstant e i L;c* forstår vi det minste naturlige tall n slik at e er med blandt konstantene i L;n.

La oss gi noen eksempler. Anta F er et monadisk predikat i L og at R er et to-plasspredikat. Da vil for eksempel (Ex)F(x) og (Ex)(Ay)(R(x,y)) være to formler i L. Den første spesielle konstanten assosiert med den første formelen vil være c;1((Ex)F(x)). Dette vil selvfølgelig ikke være en konstant i L, men i L;1. Rangen til denne konstanten vil derfor være 1. Den tredje spesielle konstanten som er assosiert med den andre formelen vil være c;3((Ex)(Ay)(R(x,y))). Dette vil også være en konstant av 1'te rang. Ser man derimot på formelen (Ex)R(x,c;1((Ex)F(x))) Vi dette ikke være noen formel i L. Den hører derimot med blandt formlene i L;1. Den første spesielle konstanten som er assosiert med den siste formelen vil være: c;1((Ex)R(x,c;1((Ex)F(x)))). Man ser at denne konstanten ikke er med i L;1, men at den er blandt konstantene i L;2. Den er derfor en konstant av med rang 2.

Før vi går videre finner vi det hensiktsmessig å fiksere to begreper. For det første vil vi definere hva vi forstår med et *spesielt aksiom.* Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 14.1: Anta L er et språk for doxastisk logikk og at L;c er den utvidelsen av L som vi har beskrevet rett ovenfor. Med et spesielt aksiom i L;c forstår vi en formel av typen: (Ex)α → α;x[r], der r er en av de spesielle konstantene assosiert med (Ex)α.

© 2008 Morten Harboe Rognes

Holder vi oss til den formelen som vi sist ga som eksempel vil derfor følgende to formler være spesielle aksiomer i L;c:

(i) (Ex)R(x,c;1((Ex)F(x))) → R(c;1((Ex)R(x,c;1((Ex)F(x)))),c;1((Ex)F(x)))
(ii) (Ex)R(x,c;1((Ex)F(x))) → R(c;2((Ex)R(x,c;1((Ex)F(x)))),c;1((Ex)F(x)))

Leseren kan selv på egenhånd konstruere andre eksempler om vedkommende finner det nødvendig.

Vi gir så en definisjon av det andre begrepet vi trenger, nemlig hva som menes med at en formel er en *E-formel med hensyn på den spesidle konstanten r*.

Definisjon 14.2:
(a) Anta L er et språk for doxastisk logikk og L;c er L utvidet med alle mulige spesielle konstanter. Da sier vi at en formel β er en E-formel med hensyn på den spesielle konstanten r i L;c hvis og bare hvis r er en spesiell konstant i L;c og β er med i den minste formelmengden X i L;c som oppfyller de følgende to krav:

(i) Ethvert spesielt aksiom av typen (Ex)α → α;x[r] er med i X
(ii) Er γ en formel i X og er CT;a(δ) en formel i L;c hvor konstanten r ikke forekommer er også formelen η(a) →. CT;a(δ) → CT;a(δ&γ) med i X

Vi sier at en formel α i L;c er en *E-formel* om den er en E-formel med hensyn på en spesiell konstant r. To E-formler som er nøyaktig like bortsett fra at de er E-formler med hensyn på forskjellige spesielle konstanter sies å ha *den samme E-form*.

Man merker seg de følgende forhold: For det første at det bare kan finnes en tellbart uendelig mengde med E-former. Disse kan derfor enummereres i en bestemt rekkefølge: E;0, E;1, E;2, ... osv. For det andre finnes det tellbart uendelig mange E-formler i hver E-form.

La oss tilslutt gi de følgende definisjoner:
Anta L er et språk for doxastisk logikk. Vi sier da at en mengde med formler Δ Inkl CFm(L) har E-egenskapen om Δ for inneholder en formel fra hver eneste E-form.

Anta L er et språk for doxastisk logikk. Vi sier da at en mengde med formler Δ Inkl CFm(L) har er en Henkin-mengde hvis og bare hvis vi har at for enhver formel av typen (Ex)α som er med i Δ finnes det en konstant e slik at α;x[e] er med i Δ.

§15 Maksimalt konsistente mengder og Lindenbaums teorem

Stoffet i denne paragrafen er velkjent. Det kan likevel være gunstig å ta det med for fullstendighetens skyld.

I det følgende forutsetter vi at L er et språk for doxastisk logikk slik vi har definert det i §2. Imidlertid kan det godt inneholde spesielle konstanter. Er L et språk for doxastisk logikk betegner CFm(L) mengden av alle de lukkede formlene i L. Vi gjør oppmerksom på at det følgende står S som plassholder for et av systemene vi har definert i dette skrift, nemligenten Kη-, Kη eller Kη+

© 2008 Morten Harboe Rognes

Definisjon 15.1: Vi sier at en formelmengde Δ i CFm(L) er konsistent i kalkylen S, kortere Δ er S-konsistent, hvis og bare hvis det ikke finnes noen formler α;1,...,α;n (n>=1) som er med i Δ slik at S |- ~(α;1&...&α;n)

Definisjon 15.2: Med en maksimalt S-konsistent formelmengde Δ i L forstår vi en S-konsistent formelmengde Δ som er slik at det ikke finnes noen formel α som ikke er med i Δ som kan legges til Δ slik at den mer omfattende mengde blir S-konsistent. Vi bruker "Max;k(Δ)" som forkortelse for uttrykket "Δ er en maksimalt konsistent setningsmengde". Er det viktig å vise hvilket system Δ er maksimalt konsistent med hensyn på skriver vi: "S-Max;k(Δ)"

Den følgende sats er svært viktig fordi den viser at enhver konsistent formelmengde i L kan utvides til en maksimalt konsistent formelmengde.

Lemma 15.1 (Lindenbaums sats) Anta Δ er en konsistent formelmengde i CFm(L). Da finnes det en maksimalt konsistent formelmengde i CFm(L), Γ, som inneholder Δ ie. der: Δ Inkl Γ.

Bevis: Anta at (1) Δ er konsistent formelmengde. Siden mengden av formler i L er tellbart uendelig finnes det en opptelling α;0, α;1,..... av formlene i L. Dette innebærer at
(2) (Aβ)(βêFm(L) → (En)(nêNat & β= α;n). Vi definerer nå en induktivt en sekvens av formelmengder Δ;n, for nêNat, ved følgende to klausuler:

(3.1) Δ;0 = Δ
(3.2) Er n>=0 og er Δ;n U {α;n} konsistent setter man Δ;(n+1) =Δ;nU{α;n} ellers setter man Δ;(n+1)= Δ;n

Man kan nå vise at
(4) *For ethvert naturlig tall n >=0 har man at Δ;n er konsistent.*
Denne påstanden bevises ved induksjon. Er n=0 har man at Δ;0 = Δ. Men da er Δ;0 konsistent ifølge (1). Anta som induksjonshypotese at Δ;n er konsistent. Man må da vise at Δ;(n+1) er konsistent. Er Δ;nU {α;n} konsistent har vi at Δ;(n+1) åpenbart må være konsistent, siden man ifølge (3.2) har at Δ;(n+1) = Δ;nU {α;n} i dette tilfelle. Er Δ;nU{α;n} inkonsistent har man ved hjelp av (3.2) at Δ;(n+1)=Δ;n. Men ifølge induksjonshypotesen er Δ;n konsistent. I dette tilfelle må også Δ;(n+1) være konsistent. Dette viser at (4) holder.

Det skulle også være nokså klart at vi har:
(5) (An)(n,mêNat & m=<n → Δ;m Inkl Δ;n).
Dette kan bevises ved induksjon på n.

Basistrinn: n=0. Da har vi, om m=<n, at m=0. Siden det er trivielt at Δ;0 Inkl Δ;0 holder satsen i dette tilfellet.

Induksjonstrinn: Anta satsen holder for n, ie at:
(5.1) (Am)(mêNat & m=<n → Δ;m Inkl Δ;n). Nå har man fra (3.2) at
(5.2) Δ;n Inkl Δ;(n+1). Fra (5.1) og (5.2) følger da :
(Am)(mêNat & m=<n → Δ;m Inkl Δ;(n+1)) Dette viser at (5) holder.

Vi setter nå: (6) Γ = UN/j,0,n/(Δ;n). Det er nødvendig å vise at Γ er en maksimalt konsistent utsagnsmengde. Vi må da vise at Γ er konsistent og, dersom β er en formel som ikke

© 2008 Morten Harboe Rognes

er med i Γ, så er ΓU{β} inkonsistent. (Jmf. definisjonen av maksimalt konsistent formelmengde).

Anta at Γ er inkonsistent. Da finnes det per definisjon formler β;1,...,β;n êΓ slik at (7) |- ~(β;1&...&β;n). Fra (6) følger, siden β;i êΓ, at det finnes et naturlig tall k;i slik at β;i êΔ;(k;i). La q være det største av disse tallene k;i ettersom i gjennomløper {1,...,n}. Da har vi ved hjelp av (5), siden de diverse k;i =<q, at β;iêΔ;(k;i) Inkl Δ;q for iê{1,...,n}. Dette innebærer at {β;1,...,β;n} Inkl Δ;q. Men fra dette, (7) og definisjonen av konsistent formelmengde følger at Δ;q er inkonsistent. Dette strider mot (4). Vi konkluderer derfor med:

(8) Γ er konsistent.

Anta nå for reduktio at absurdum at β er en formel der vi har (9) ~(βêΓ) og dessuten (10) ΓU{β} er konsistent. I lys av (2) følger det at (11) β= α;n for noe naturlig tall n. Fra (10) følger, siden Δ;n Inkl Γ, at (12) Δ;nU {β} er konsistent. Men da har vi ved hjelp av (3.2):

(13) β ê Δ;nU{β} = Δ;nU{α;n} = Δ;(n+1) Inkl Γ.

Men dette strider åpenbart mot (9) Vi har derfor, for alle β som ikke er med i Γ, at ΓU{β} er inkonsistent. Fra dette og (8) følger det at Γ er maksimalt konsistent. Siden Δ=Δ;0 Inkl Γ følger det at satsen holder. **QED.**

I det følgende har vi bruk for en rekke egenskaper ved maksimalt konsistente mengder. De viktigste av disse er sammenfattet i den følgende hjelpesetning.

Lemma 15.2 (Lemma om egenskaper ved maksimale mengder) Anta Δ er en maksimalt konsistent mengde i L. Da gjelder følgende for alle lukkede formler α,β,γ i L:

(i) ~(αêΔ & (~α)êΔ)
(ii) (~α) êΔ v α êΔ
(iii) Kη |- α → αêΔ
(iv) αêΔ & (α→β)êΔ → βêΔ
(v) Kη |- (α→β) & αêΔ → βêΔ

Bevis: Anta at forutsetningene i teoremet holder.

Ad (i): Anta for reduktio ad absurdum at (1) αêΔ & (~α)êΔ. Det følger da umiddelbart at (2) {α,~α} Inkl Δ. Nå har man som et ytterst elemntært setningslogisk teorem at (3) |- ~(α&(~α)). Fra dette og definisjonen av konsistent utsagnsmengde følger at {α,~α} er en inkonsistent utsagnsmengde. Men siden (2) holder må også Δ være en inkonsistent utsagnsmengde. Men dette strider mot forutsetningen om at Δ er maksimalt konsistent. Det følger at (1) er umulig. Dette viser at punkt (i) holder.

Ad (ii): Anta for reduktio ad absurdum at (1) ~((~α)êΔ) & ~(αêΔ). Fra (1) følger selvfølgelig (2) ~((~α)êΔ). Siden Δ etter forutsetningen er en maksimalt konsistent utsagnsmengde følger det i lys av (2) at ΔU{~α}er inkonsistent. Dette innebærer at det må finnes formler β;1,....,β;n slik at (3) β;1,....,β;n ê Δ og der vi har

(4) |- ~(β;1&...&β;n& ~α).

Fra (1) følger tilsvarende at (5) ~(αêΔ). Siden Δ er maksimalt konsistent følger da per definisjon at ΔU{α} er inkonsistent. Dette innebærer at det finnes formler γ;1,...,γ;m der vi har (6) γ;1,...,γ;m êΔ og (7) |- ~(γ;1&...&γ;m &α). Fra (4) og (7) følger:

© 2008 Morten Harboe Rognes

(8) |- β;1&...&β;n→ α & |- γ;1&....&γ;m → ~α
Fra dette i sin tur følger: (9) |- ~(β;1&...&β;n & γ;1&....&γ;m). Men i lys av (3) og (6) innebærer dette at Δ er inkonsistent. Men dette strider mot forutsetningen om at Δ er maksimalt konsistent. Dette viser at punkt (ii) holder.

Ad *(iii)*: Anta for reduktio at absurdum (1) |- α & ~(αêΔ). Fra den siste konjunkten følger ved hjelp av foregående punkt at (~α)êΔ. Da har vi (2) {~α} Inkl Δ. Men siden |-α følger |- ~~α. Dette innebærer at {~α} er inkonsistent. Men i lys av (2) må da Δ være inkonsistent noe som strider mot at Δ er maksimalt konsistent. Det følger at (1) ikke holder. Dette viser punkt (iii) holder.

Ad (iv). Anta (1) αêΔ & (α→β)êΔ og for reduktio ad absurdum at (2) ~(βêΔ). Fra (2) og punkt (ii) følger at (~β)êΔ. Fra dette og (1) følger at
(3) {α, α→β, ~β} Inkl Δ. Nå har man ved ren setningslogikk: |- ~(α & α→β & ~β). Dette innebærer at formelmengden {α, α→β, ~β} er inkonsistent. Men i lys av (3) må da Δ være inkonsistent. Men det er umulig siden Δ er maksimalt konsistent. Dette viser at (iv) holder.

Ad (v) Anta (1) |-α→β og at (2) αêΔ. Fra (1) og punkt (iii) følger (α→β)êΔ. Fra dette, (2) og foregående punkt følger umiddelbart βêΔ. Dette viser punkt (v) holder.
Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Det bør bemerkes at Lindenbaums lemma, Lemma 4.1 og Lemma 4.2 holder uansett hvilket system det er man arbeider med så lenge systemet er en av de utvidelsene av Kη- som vi har avgrenset i §2.

§16 Noen hensiktsmessige hjelpesetninger vedrørende spesielle aksiomer og E-former

I dette avsnittet skal vi gi bevis for endel hjelpesetninger som er viktige i selve fullstendighetsbeviset. Først nevner vi den følgende sats:

Lemma 16.1 (a) Vi har den følgende formel er et teorem i Kη+:
η(x) → T;x(α) & CT;x(β) → CT;x(α&β)
(b) Den følgende slutningsregel holder i Kη+:
|- α → |- η(x) → CT;x(β) → CT;x(β& α)
(c) Anta γ er en E-formel med hensyn på den spesielle konstanten r. La γ' være som γ bortsett fra at r overalt er erstattet med variabeltegnet y som ikke forekommer i γ. Da har vi |- (Ey)γ'.

Bevis: Ad (a): Vi har tidligere bevist at denne formelen er et teorem i Kη. Man kan konsultere Rognes [1], Elementærteorem 3, punkt (xi)
Ad (b): Anta |- α. Da har vi ved hjelp av av slutningsregelen R1 at |- α → T;x(α). Fra dette og resultatet under punkt (a) følger umiddelbart, ved hjelp av teoremet η(x) →. C;x(α&β) ↔ CT;x(β&α) og ren setningslogikk |- η(x) → CT;x(β) → CT;x(β& α).
Ad (c): Dette bevises ved induksjon på mengden av E-formler, siden denne mengden er definert induktivt. *Basistrinn*: Anta γ = (Ex)α → α;x[r] der vi har at r er den spesielle konstanten assosiert med (Ex)α. Da har vi ved hjelp av ren predikatlogikk at
|- (Ey)((Ex)α → α;x[y]) siden y etter forutsetningen ikke kan forekomme fri i (Ex)α. Dette impliserer imidlertid at |- (Ey)γ'.

© 2008 Morten Harboe Rognes

Induksjonstrinn: Anta $\gamma = (\eta(a) \rightarrow CT;a(\alpha) \rightarrow CT;a(\alpha\&\delta))$ der vi har at δ er en E-formel med hensyn på r og r ikke forekommer i $CT;a(\alpha)$. Siden variabeltegnet y etter forutsetningen ikke forekommer i γ vil det heller ikke forekomme i δ. Etter induksjonshypotesen har vi derfor derfor at (1) $\vdash (Ey)\delta'$ der δ' er som δ bortsett fra at r over alt er erstattet med y. Lar vi videre γ' være γ med r overalt med y. Da vi γ' være formelen $(\eta(a) \rightarrow CT;a(\alpha) \rightarrow CT;a(\alpha\&\delta'))$. Fra (1) følger ved hjelp av punkt b i teoremet (2) $\vdash (\eta(a) \rightarrow CT;a(\alpha) \rightarrow CT;a(\alpha\&(Ey)\delta'))$. Fra dette følger ved hjelp av TBF og predikatlogikk at (3) $\vdash (\eta(a) \rightarrow CT;a(\alpha) \rightarrow (Ey)CT;a(\alpha\&\delta'))$. Fra dette følger i sin tur ved hjelp av predikatlogikk, siden variabeltegnet y ikke forekommer i γ : $\vdash (Ey)(\eta(a) \rightarrow CT;a(\alpha) \rightarrow (Ey)CT;a(\alpha\&\delta'))$. Det følger at $\vdash (Ey)\gamma'$. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Lemma 16.2 Anta Δ er en mengde med formler i L;c som er konsistent med hensyn på $K\eta+*$ og hvor ingen av formlene inneholder den spesielle konstanten r. Anta γ er en E-formel med hensyn på den spesielle konstanten r. Da har vi at også $\Delta \cup \{\gamma\}$ er konsistent med hensyn på $K\eta+*$.

Bevis: For anta for reduktio ad absurdum at $\Delta \cup \{\gamma\}$ ikke er konsistent. Da må det finnes visse formler $\delta;1, \ldots, \delta;n \hat{e} \Delta$ slik at $\vdash \neg(\gamma \& \delta;1 \& \ldots \& \delta;n)$. Dette er ekvivalent med: $\vdash \gamma \rightarrow \neg(\delta;1 \& \ldots \& \delta;n)$. La nå y være en helt ny variabel som ikke forekommer i noen av formlene $\delta;1, \ldots, \delta;n$ og γ. Vi erstatter alle forekomster av den spesielle konstanten r med y. Resultatet av å erstatte r med y i γ betegner vi med γ'. Da har vi: (1) $\vdash \gamma' \rightarrow \neg(\delta;1 \& \ldots \& \delta;n)$. For er $b;1, \ldots, b;k$ et bevis for $\gamma \rightarrow \neg(\delta;1 \& \ldots \& \delta;n)$ vil vi få et bevis for $\gamma' \rightarrow \neg(\delta;1 \& \ldots \& \delta;n)$ ved å erstatte alle forekomster av konstanten r i $b;1, \ldots, b;k$ med variabeltegnet y. Fra (1) har vi ved hjelp av UG at $\vdash (Ay)(\gamma' \rightarrow \neg(\delta;1 \& \ldots \& \delta;n))$. Dette er ekvivalent med $\vdash (Ey)\gamma' \rightarrow \neg(\delta;1 \& \ldots \& \delta;n)$. Men γ var en E-formel. Da har vi ved hjelp av forrige sats at $\vdash (Ey)\gamma'$. Det følger at $\vdash \neg(\delta;1 \& \ldots \& \delta;n)$. Men dette innebærer at Δ er inkonsistent. Men det er umulig. **QED**.

Lemma 16.3 Anta Δ er en mengde med lukkede formler i L som er konsistent med hensyn på $K\eta+$. Utvid L til L;c. Da vil Δ også være konsistent med hensyn med hensyn på $K\eta+*$, dvs. kalkylen $K\eta+$ med språket utvidet til L;c.

Bevis: Anta for reduktio ad absurdum at Δ ikke er konsistent med hensyn på $K\eta+*$. Da finnes det $\beta;1, \ldots, \beta;n \hat{e} \Delta$ slik at $K\eta+* \vdash \neg(\beta;1 \& \ldots \& \beta;n)$. Da vil det finnes en formelrekke $\gamma;1, \ldots, \gamma;k$ der $\gamma;k = \neg(\beta;1 \& \ldots \& \beta;n)$ som er et bevis i $K\eta+*$. La $e;1, \ldots, e;j$ være de spesielle konstantene som forekommer i formlene i dette beviset. Vi plukker da ut en mengde med j nye variabeltegn $y;1, \ldots, y;j$ som ikke forekommer i formlene $\gamma;1, \ldots, \gamma;n$ og erstatter overalt enhver forekomst av $e;1, \ldots, e;j$ med henholdsvis en forekomst av $y;1, \ldots, y;j$. Da vil beviset $\gamma;1, \ldots, \gamma;k$ transformeres til et bevis for $\gamma;k$ som ikke inneholder noen spesielle konstanter i det hele tatt og som er ført helt innenfor rammen av $K\eta+$, fordi man lett kan verifisere at alle instanser av en slutningsregel (eller et aksiomskjema) som har blitt brukt går over til en annen instans av den samme slutningsregel (eller det samme aksiomskjema) når man anvender denne operasjonen. **QED**.

Lemma 16.4 Anta L er et språk for doxastisk logikk og anta
$\Delta = \{\eta(a), CT;a(\beta, \delta;1, \ldots, \delta;n), T;a(\gamma;1), \ldots, T;(\gamma;m)\}$
er en mengde med lukkede formler i L som er konsistent med hensyn på $K\eta+$. Da er også

© 2008 Morten Harboe Rognes

| {β, δ;1,...., δ;n, γ;1,...,γ;m} en mengde med formler som er konsistent med hensyn på Kη+. |

Bevis: Anta {β, δ;1,...., δ;n, γ;1,...,γ;m} er inkonsistent. Da har man
(1) |- γ → ¬(β & δ) der (2) γ = γ;1& ... & γ;m og (3) δ = δ;1& ... &δ;n. Ved hjelp av R2 kan man da slutte: |- η(a) → T;a(γ) → T;a(¬(β&δ)). Fra dette følger
|- η(a) → T;a(γ) → ¬¬T;a(¬(β&δ)). Herav: |- ¬(η(a) & T;a(γ) & CT;a(β&δ)). Men i lys av (2) og (3) impliserer det siste at {η(a), CT;a(β, δ;1,...,δ;n), T;a(γ;1), ..., T;(γ;m)} er inkonsistent. Dette strider imidlertid mot forutsetningen i teorem. **QED**.

§17 Konstruksjon av en trestruktur av maksimalt konsistente mengder der alle elementene har E-egenskapen

I dette avsnittet skal vi gjøre følgende. Vi starter med en vilkårlig konsistent mengde med lukkede formler Δ i et språk for doxastisk logikk L. Først vil vi vise hvordan denne mengden kan utvides til en maksimalt konsistent mengde i L;c som har E-egenskapen. Dernest vil vi vise hvordan man, gitt en maksimalt konsistent mengde Δ i L;c med E-egenskapen, for hver konstant a og enhver formel β der vi har η(a)êΔ og CT;a(β), kan konstruere en maksimalt konsistent mengde Γ med E-egenskapen som inneholder β og der Mg(α: T;a(α)êΔ) Inkl Γ.

(A) Anta Δ er en mengde med lukkede formler i L som er konsistent med hensyn på Kη+. Vi utvider så språket L med spesielle konstanter til L;c. Kalkylen Kη+ med språket utvidet til L;c betegner vi med Kη+*. Ved hjelp av Lemma 16.3 følger at Δ også er konsistent med hensyn på Kη+*.

Det neste trinn er det følgende. Vi ordner mengden av alle E-former i en standardrekkefølge, E;1, E;2, ... , E;n, ... Vi tenker oss altså at vi har valgt ut en enummerering E av alle disse E-formene. Dernest utvider vi Δ med en E-formel γ;1 fra den første E-formen, E;1 slik at vi får Δ U {γ;1}. I γ;1 vil det bare finnes endelig mange spesielle konstanter. I formlene som inngår i Δ finnes det ingen spesielle konstanter. Siden de i hver E-form finnes uendelig mange E-formler med den samme E-form kan vi fra E;2 velge ut en E-formel γ;2 med hensyn på en spesiell konstant som hverken forekommer i Δ eller i γ;1. Slik fortsetter vi. Har vi utvidet Δ med nye E-formler γ;1,...., γ;n henten fra henholdvis E;1,...,E;n kan vi velge ut en E-formel γ;(n+1) fra E;(n+1) med hensyn på en spesiell konstant r som ikke forekommer hverken i Δ eller noen av de tidligere. På denne måten utvider vi Δ med en formel fra enhver av E-formene i rekken <E;n>/nêN/. Vi betegner den formelmengden som fremkommer som resultat med Δ'. Når det gjelder Δ' merker man seg følgende.

(1) Δ Inkl Δ'. Dette er trivielt og følger direkte fra den måten Δ' er konstruert på.

(2) For enhver formel av typen (Ex)α i L;c som er med i Δ' finnes det en spesiell konstant r slik at (Ex)α → α;x[r] er med i Δ. Grunnen til dette er at ethvert spesielt aksiom av typen (Ex)α → α;x[r] gir opphav til en E-form med uendelig mange elementer siden vi for r kan sette inn uendelig mange andre spesielle konstanter assosier med (Ex)α. Alle disse formlene har den samme E-form og hører derfor til den samme E- form som (Ex)α → α;x[r].

(3) Δ' er konsistent med hensyn på Kη+*. Dette følger ved hjelp av Lemma 16.2: For anta for reduktio ad absurdum at at Δ' var inkonsistent med hensyn på Kη+*. Da ville det finnes δ;1,...,δ;kêΔ og E-formler β;1,...,β;j slik at (¤) Kη+* |- ¬ (δ;1&...&δ;k&β;1&...β;j). Siden β;1,...β;j er E-formler som er blitt lagt til Δ kan de ordnes i en slik rekke følge at β;q for q=1,..j er en E-formel med hensyn på en spesiell konstant som ikke forekommer tidligere. Men siden {δ;1,...,δ;k} er konsistent siden den er en delmengde av Δ som etter forutsetningen er konsistent og de diverse β;1,...,β;j legges til suksessivt slik at den spesielle konstanten assosiert med β;l

© 2008 Morten Harboe Rognes

ikke forekommer i {δ;1,...,δ;k}U{β;1,..,β;(j-1)} følger det ved hjelp av Lemm 16.2 at {δ;1,...,δ;k}U{β;1,..,β;j} er konsistent. Men dette strider mot (¤).

(3) Siden Δ' er konsistent kan Δ' utvides til en maksimalt konsistent mengde Γ;1. Siden Δ' inneholder et spesielt aksiom av typen (Ex)α → α;x[r] for en eller annen spesiell konstant r er vi sikret at Γ;1, siden den er maksimalt konsistent, er slik at for enhver formel av typen (Ex)α som er med i Γ;1 finnes det en konstant r slik at α;x[r]êΓ;1. Med andre ord er Γ;1 en Henkin-mengde. Det skulle også være åpenbart at Δ' har E-egenskapen, dvs. innholder en E-formel fra enhver E-form.

Siden Γ;1 er en maksimalt konsistent formelmengde innebærer dette at enhver formel av typen a=b der a,b er konstanter i L;c enten er med eller ikke med i Γ;1. Siden = i kraft av identitetsaksiomene er en ekvivalensrelasjon har man at det for enhver konstant c i L;c vil finnes en mengde av konstanter a slik at (c=a)êΓ;1. Er c en konstant i L;c og Σ en vilkårlig maksimalt konsistent mengde i L;c betegner vi Mg(a: aêConst(L;c) & (c=a)êΣ) med [c];Σ. Man legger merke til at dersom c;1 og c;2 er konstanter i L;c der (c;1≠c;2)êΓ;1 har vi at [c;1];(Γ;1) Ω [c;2];(Γ;1) = ø For var eê [c;1];(Γ;1) Ω [c;2];(Γ;1) ville vi a (e=c;1)êΓ;1 og (e=c;2)êΓ;1 og derfor siden Γ;1 er en maksimalt konsistent mengde at (c;1=c;2)êΓ;1 noe som åpenbart strider mot at (c;1≠c;2)êΓ;1.

Mengden av de diverse [c];(Γ;1) ettersom c gjennomløper alle konstantene i L;c vil være de elementene som vi tenker oss at skal utgjøre domenet D i den modellen vi skal konstruere.

I det følgende betegner Const(L) mengden av alle konstanter i språket L. Const(L;c) vil følgelig være mengden av alle konstanter i L;c. Max(L;c) vil i det følgende betegne mengden av Kη+*-maksimale formelmengder i CFm(L;c) med E-egenskapen. Mengden av de diverse [e];Σ, der ΣêMax(L;c) og e gjennomløper Const(L;c) betegner vi med Const;Σ(L;c). Tilslutt skal vi tenke oss at vi har valgt ut en utvalgsfunksjon ξ som plukker ut et element fra hver ekvivalensklasse i UN(Const;Σ(L;c): ΣêMax(L;c)).

(B)[8] I forrige avsnitt konstruerte vi, med utgangspunkt i en konsistent mengde Δ i L en mer omfattende mengde Γ;1 med lukkede formler i L;c som var maksimalt konsistent og som hadde E-egenskapen. Vi skal nå vise hvordan man gitt en vilkårlig maksimalt konsistent formelmengde i L;c med E-egenskapen, Γ;i kan konstruere for hver konstant a i L;c og hver formel β i L;c der man har η(a)êΓ;i og CT;a(β)êΓ;i, en underordnet maksimalt konsistent mengde med E-egenskapen, Γ;j, der vi har βêΓ;j og Mg(α: T;a(α) êΓ;i) Inkl T;j.

Når det gjelder konstruksjonen av Γ;j starter vi med {β}. Vi gir så denne mengden E-egenskapen på følgende måte: Vi betrakter den første E-formen i standardordningen av E-former. La δ;(1,1), δ;(1,2), ... , δ;(1,n),... være alle de E-formlene som tilhører denne første E-formen. De avviker bare fra hverandre ved å være E-formler med hensyn på forskjellige spesielle konstanter. Siden Γ;i har E-egenskapen finnes det en E-formel

η(a) → CT;a(β) → CT;a(β & δ;(1,*))ê Γ;i der δ;(1,*) er en av disse δ;(1,1), δ;(1,2), ... , δ;(1,n),... . Vi utvider så {β} med denne δ;(1,*).

Vi tar så for oss den andre E-formen E;2 som inneholder δ;(2,1),... ,δ;(2,n), ... osv. Siden Γ;i har E-egenskapen vil det finnes en formel δ;(2,*) slik at

η(a) → CT;a(β & δ;(1,*)) → CT;a(β & δ;(1,*) & δ;(2,*))ê Γ;i

der δ;(2,*) er blandt disse δ;(2,1),.... ,δ;(2,n), ...

[8] Konstruksjonen av mengden Γ;j i dette avsnittet er hentet nesten ordrett fra Huges og Cresswell [1], s. 167-168. Det er noen forskjeller naturligvis, men enhver som sammenligner det vi her skriver, med det Hughes og Cresswell skriver, vil se hvor mye vi skylder dem. Hughes og Cresswell introduserer ikke spesielle konstanter på den måten vi gjør her. De bruker istedet variabler. Metoden med å bruke spesielle konstanter har vi fra Shoenfield [1], side 46.

© 2008 Morten Harboe Rognes

Generelt følger vi dette mønster: Gitt at vi for de m første E-formene har lagt til δ;(1,*), δ;(2,*), ... , δ;(m,*) legger vi til δ;(m+1,*) fra den (m+1)'te E-formen som er slik at

η(a) → CT;a(β& δ;(1,*)& ...& δ;(m,*)) →

CT;a(β& δ;(1,*)& ...& δ;(m,*)& δ;(m+1,*)) ê Γ;i.

Siden Γ;i har E-egenskapen kan vi alltid finne en slik formel.

På grunnlag av konstruksjonen ovenfor ser man også at vi for alle n har at CT;a(β & δ;(1,*)& ...& δ;(n,*)êΓ;i. Dette innebærer at dersom {α;1,....,α;n} er en delmengde av {β, δ;(1,*), ... ,δ;(m,*),.....} så har vi også at CT;a(α;1& ... α;n)êΓ;1. Dette er fordi vi vi har: Kη+* |- η(x) → CT;a(α&β) → CT;a(α).

Vi kaller mengden som fremkommer når vi til {β} legger til alle de E-formlene som er plukket ut på måten ovenfor for Γ;j'. Dernest utvider vi denne mengden med Mg(α: T;a(α)êΓ;i). Den resulterende mengden kaller vi T;j". Man kan vise at denne mengden er konsistent. For anta den er inkonsistent. Da vil det finnes en viss endelig delmengde av T;j" {β, δ;1,....,δ;n, γ;1,....,γ;m} der vi har:

(1) |- ¬(β & δ;1& .... &δ;n & γ;1& ... &γ;n) og hvor vi har at

(2) {γ;1,....,γ;m} Inkl Mg(α: T;a(α)êΓ;i) og

(3) CT;a(β & δ;1& ... & δ;n)êΓ;i & η(a)êΓ;i

Men da har vi {η(a), CT;a(β &δ;1& ... & δ;n), T;a(γ;1),... , T;a(γ;n)} Inkl Γ;i. Siden Γ;i er konsistent er {η(a), CT;a(δ;1& ... & δ;n), T;a(γ;1),... , T;a(γ;n)} det også. I lys Lemma 16.4 må da også {β, δ;1,....,δ;n, γ;1,....,γ;m} være konsistent. Men det strider mot (1). Det følger at Γ;j" er konsistent. Γ;j" kan derfor utvides til en maksimalt konsistent mengde Γ;j.

Anta Γ;i og Γ;j er to maksimalt konsistente memgder med E-egenskapen. Vi skal da si at *Γ;j er underordnet Γ;i med hensyn på konstanten a* hvis og bare hvis η(a)êΓ;i og det finnes en β slik at CT;a(β)êΓ;i og Γ;j er konstruert på den måten som er beskrevet ovenfor med utgangspunkt i Γ;i.

§18 Fullstendighetsbeviset for Kη+ sluttført.

Vi skal nå fullføre fullstendighetsbeviset for Kη+. Vi starter med en en mengde av lukkede formler Δ i L som er konsistent med hensyn på Kη+. Målet er å konstruere en relasjonell modell M=< D,I,<R;x>/xêD/,Φ,φ> der vi har har at det finnes en w;0êI hvor man har (Aα)(αêΔ → (M,w) ⊨ α).

Først utvider vi språket L til L;c ved å utvide L med spesielle konstanter på den måten som ble vist i §14. Dernest utvider vi Δ til en maksimalt konsistent mengde med E-egenskapen, Γ;1, i L;c. Med utgangspunkt i denne mengden Γ;1 skal vi så definere de enkelte elementene i modellen M.

Vi definerer først en mengde av maksimalt konsistente mengder med E-egenskapen X;0 på følgende måte. De enkelte elementer i X;0 skal representere de mulige verdenene i modellen M. X;0 defineres induktivt som den minste mengden Q som oppfyller de følgende krav:

(i) Γ;1êQ

(ii) Anta Γ er en maksimalt konsistent mengde med E-egenskapen og at denne er med i Q. Anta Δ er underordnet Γ med hensyn på ξ(a) der a er et eller annet element i Const;Γ(L;c). Da er Δ også med i Q.

Vi kan nå definere modellen M=< D,I,<R;x>/xêD/,Φ,φ>. Dette skjer slik:

(a) Vi setter (1) I = X;0. Man ser at I da er en mengde med maksimalt konsistente mengder som alle har E-egenskapen. Siden Γ;1 er med i I har vi at Δ Inkl w for noe element wêI.

© 2008 Morten Harboe Rognes

(b) Vi definerer D ved å sette (2) D= Const;(Γ;1)(L;c). Vi skal vise at vi har for alle Δ∈X;0 at D= Const;Δ(L;c). Dette innebærer at domenet i hver verden er det samme.

Det vil være nok å vise at dersom Δ er underordnet Γ med hensyn på ξ(a) der a er med i Const;Γ(L;c) så har vi Const;Δ(L;c) = Const;Γ(L;c). Satsen følger da ved induksjon på X;0.

Vi tar først for oss inklusjonen mot venstre: Anta x∈Const;Γ(L;c). Da finnes det e1∈Const(L;c) slik at x= [e1];Γ. Anta for vilkårlig konstant f i L;c at f∈[e1];Γ. Da har vi per definisjon at (f=e1)∈Γ. Siden Γ er maksimalt konsistent følger det alle instanser av E1 er med i Γ. Dette innebærer at (η(ξ(a)) → (f=e1) → T;ξ(a)(f=e1))∈Γ. Siden η(ξ(a))∈Γ siden Δ er underordnet Γ med hensyn på ξ(a). Følger det at T;ξ(a)(f=e1)∈Γ. Siden Δ er underordnet Γ kan vi da i lys av måten Δ er konstruert på slutte at (f=e1)∈Δ. Men da har vi f∈[e1];Δ.

Anta på den annen side at f∈Const(L;c) og at ¬(f∈[e1];Γ). Da har vi ¬((f=e1)∈Γ). Siden Γ imidlertid er maksimalt konsisten følger da (f<>e1)∈Γ. Nå har vi at alle instanser av E2 er med i Γ, siden Γ er maksimalt konsistent. Dette innebærer at

(η(ξ(a)) → (f<>e1) → T;ξ(a)(f<>e1))∈Γ. Siden Δ er underordnet Γ med hensyn på ξ(a) følger det at η(ξ(a))∈Γ. Vi må derfor ha (T;ξ(a)(f<>e1))∈Γ. Men da (f<>e1)∈Δ. Det følger siden Δ er maksimalt konsistent at ¬(f∈[e1];Δ)

Fra det vi så langt har vist følger [e1];Γ = [e1];Δ. Men siden e1∈Const(L;c) følger det at x∈Const;Δ(L;c).

Vi tar så for oss inklusjonen mot høyre. Anta for vilkårlig x at x∈Const;Δ(L;c). Da finnes det e1∈Const(L;c) slik at x=[e1];Δ. Det vil være nok å vise at [e1];Δ= [e1];Γ. Anta først for reduktio ad absurdum at det finnes en f der man har f∈[e1];Δ, men ¬(f∈[e1];Γ). Fra det siste følger, siden Γ er en maksimalt konsistent mengde, (f<>e1)∈Γ. Siden Δ er underordnet Γ kan vi på samme måte som ovenfor , siden

(η(ξ(a)) → (f<>e1) → T;ξ(a)(f<>e1))∈Γ slutte at (f<>e1)∈Δ. Men da ¬(f∈[e1];Δ), noe som strider mot at f∈[e1];Δ. Vi har derfor at [e1];Δ Inkl [e1];Γ. Anta på den annen side for vilkårlig f at f∈[e1];Γ. Da kan vi på nøyaktig samme måte som ovenfor vise at f∈[e1];Δ.

Det følger at [e1];Δ= [e1];Γ og derfor siden e1∈Const(L;c) at x=[e1];Δ= [e1];Γ er med i Const;Γ(L;c).

Dette viser at vi med full konsistens kan definere D, domenet i modellen, ved å sette D= Const;(Γ;1)(L;c)

Det gjenstår imidlertid å si noe om hvordan vi skal behandle navn i forbindelse med modellstrukturen M. Er i et navn betegner som man husker n;-1(i) det objektet i er navn på. Nå er objektene i D ekvivalensklasser av konstanter, ie. elementer i Const;(Γ;1)(L;c). Navnene skaper derfor ingen direkte problemer. Men vi trenger et begrep i forbindelse med disse navnene. Anta α er en lukket formel i L;c(D). La i;1,...,i;n være de navnene som forekommer i α. Under disse omstendigheter skal vi med (α)* betegne den formelen som fremkommer når vi for hvert j=1,..,n erstatter navnet i;j overalt i α med konstanten
ξ(n;-1(i;j)). Man ser da at (α)* er en lukket formel i L;c. Man ser også at dersom α er en lukket formel i L(D) som ikke inneholder noen navn har vi at (α)* = α. Vi har bruk for denne operasjonen * når vi formulerer hovedteoremet nedenfor.

(c) Vi må også definere de diverse relasjonene <R;x>/x∈D/. Dette gjøres slik: Anta x∈D. Da har vi at x∈Const;(Γ;1)(L;c) Vi setter da:

<Δ,Γ>∈R;x ↔ Γ er underordnet Δ med hensyn på ξ(x).

(d) Er x∈D og Δ∈X;0=I setter vi:

$$\Phi(x,\Delta) = Mg(\alpha: T;\xi(x)((\alpha)^*)\in\Delta \;\&\; \alpha\in CFm(L;c(D)))$$

(e) Er P et n-ært predikat i L setter vi

© 2008 Morten Harboe Rognes

$\varphi(P)(w) = Mg(<x;1,..,x;n>: x;1,...,x;n \hat{e} D \ \& \ P(\xi(x;1),....,\xi(x;n)\hat{e}w)$ om $w\hat{e}I=X;0$.

(f) Vi setter $\varphi(\eta)(w)= Mg(x: x\hat{e}D \ \& \ \eta(\xi(x))\hat{e}w)$ om $w\hat{e}I= X;0$

(g) Vi definerer $\varphi(=)$ slik:

$\varphi(=)(w) = Mg(<x,y>: x,y\hat{e}D \ \& \ x=y)$

(h) Vi må også definere φ for de diverse konstantene som inngår i L;c. Disse konstantene omfatter (i) alle de konstantene som inngår i L, og (ii) alle de spesielle konstantene som vi innførte når vi utvidet L til L;c.

Er e en konstant i L setter vi $\varphi(e) = [e];(\Gamma;1)$. Er e en spesiell konstant som ble introdusert da vi utvidet L til L;c setter vi ogs $\varphi(e) = [e];(\Gamma;1)$. Dermed skulle $\varphi(e)$ være definert for alle konstanter e.

Dermed har vi definert den relasjonelle modellstrukturen $M= < D,I,<R;x>/x\hat{e}D/,\Phi,\varphi>$ fullstendig.

Vi vil nå gi bevis for den følgende sats:

Teorem 18.1 Anta $M = < D,I,<R;x>/x\hat{e}D/,\Phi,\varphi>$ er definert slik som angitt ovenfor. Da har vi for alle $\alpha\hat{e}CFm(L;c(D))$ at følgende holder:

$(M,w) \models \alpha \ \leftrightarrow \ (\alpha)^*\hat{e}w$ forutsatt at $w\hat{e}I$

Man ser at siden Δ Inkl CFm(L) Inkl Cfm(L;c(D)) og Δ Inkl $\Gamma;1$ følger det om vi setter $w=\Gamma;1$ at $(A\alpha)(\alpha\hat{e}\Delta \rightarrow (M,w) \models \alpha)$.

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på lengden av formler.

(a) Anta $\alpha = P(c;1,....,c;n)$ der c;j (j=1,..,n) enten er en konstant i L;c eller et navn.
Da har vi at (1) $(M,w) \models \alpha$ er ekvivalent med (2) $<q(c;1),....,q(c;n)>\hat{e}\varphi(P)(e)$ der $q(c;i) = \varphi(c;i)$ om c;i er en konstant i L;c og $q(c;i)= n;-1(c;i)$ om c;i er et navn. Nå er (2) ekvivalent med at det finnes $x;1,....,x;n\hat{e}D$ slik at $<q(c;1),....,q(c;n)> = <x;1,...,x;n>$ og $P(\xi(x;1),..,\xi(x;n))\hat{e}w$. Dette er i sin tur ekvivalent med at (3) $P(\xi(q(c;1)),....,\xi(q(c;n))\hat{e}w$.
Er c;i en konstant i L;c har vi $q(c;i) = [c;i];(\Gamma;1)$. Fra definisjonen av ξ har vi naturligvis $\xi(q(c;i))\hat{e}q(c;i) = [c;i];(\Gamma;1)$. Men vi har også $c;i\hat{e}[c;i];(\Gamma;1)$. Det følger videre, siden vi generelt har om e er en konstant i L;c at $[e];w = [e];w'$ om $w,w\hat{e}I$, at $\xi(q(c;i))$, $c;i\hat{e}[c;i];w$ og derfor at (4) $(\xi(q(c;i))=c;i)\hat{e}w$ Er på den annen side c;i et navn i L;c(D) har vi $q(c;i)= n;-1(c;i)$. Da følger det videre at (5) $\xi(q(c;i))= \xi(n;-1(c;i))$. Siden alle instanser av identitetsaksiomene er med i w, og w er en maksimalt konsistente mengde har vi i lys av (4) og (5), at (3) er ekvivalent med $(P(c;1,...,c;n))^*\hat{e}w$. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

(b) Vi har $(M,w) \models \neg\alpha$ hvis og bare hvis $\neg((M,w) \models \alpha)$. I lys av induksjonshypotesen er dette siste ekvivalent med $\neg((\alpha)^*\hat{e}w)$. Siden w er en maksimalt konsistent mengde er dette i sin tur ekvivalent med $(\neg(\alpha)^*)\hat{e}w$. Men i lys av definisjonen av operasjonen * er det åpenbart at $\neg(\alpha)^* = (\neg\alpha)^*$. Vi har derfor det vi ønsker, nemlig: $(M,w) \models \neg\alpha \ \leftrightarrow (\neg\alpha)^*\hat{e}w$.

(c) Er $\alpha = (\beta\rightarrow\gamma)$ har vi $(M,w) \models (\beta\rightarrow\gamma)$ hvis og bare hvis $(M,w) \models \beta \rightarrow (M,w) \models \gamma$

© 2008 Morten Harboe Rognes

I lys av induksjons hypotesen følger så fra dette $(\beta)^*\hat{e}w \rightarrow (\gamma)^*\hat{e}w$. Siden w er en maksimalt konsistent mengde er det lett å vise at dette er ekvivalent med $((\beta)^* \rightarrow (\gamma)^*)\hat{e}w$. Nå har vi i lys av definisjonen av operasjonen * at $(\beta\rightarrow\gamma)^* = (\beta)^*\rightarrow(\gamma)^*$. Det følger at $(M,w) \models (\beta\rightarrow\gamma) \leftrightarrow (\beta\rightarrow\gamma)^*\hat{e}w$. Dette viser at satsen holder også i dette tilfellet.

(d) Vi har at $\alpha = (Ax)\beta$. I så tilfelle må vi vise:
(1) $(M,w) \models (Ax)\beta \leftrightarrow ((Ax)\beta)^*\ \hat{e}w$. Man har at venstre side i (1) er ekvivalent med:
(2) $(Ac)(c\hat{e}D \rightarrow (M,w) \models \beta;x[n(c)])$ Høyre side i (1) er ekvivalent med:
(3) $(Ax)(\beta)^*\ \hat{e}w$. Vi skal vise to ting:
(+) $(Ax)(\beta)^*\hat{e}w \leftrightarrow (Ar)(r\hat{e}Const(L;c) \rightarrow \beta^*;x[r]\hat{e}w)$
(++) $(Ac)(c\hat{e}D \rightarrow (M,w) \models \beta;x[n(c)]) \leftrightarrow (Ar)(r\hat{e}Const(L;c) \rightarrow \beta^*;x[r]\hat{e}w)$
Dette vil være tilstrekkelig for å vise at (1) holder.

Ad (+): Anta (4) $(Ax)\beta^*\hat{e}w$ og anta at $r\hat{e}Const(L;c)$ for vilkårlig r. Siden w er en maksimalt konsistent mengde har vi at $((Ax)\beta^* \rightarrow \beta^*;x[r])\hat{e}w$. Fra dette og (4) følger, siden w er maksimalt konsistent, at $\beta^*;x[r]\hat{e}w$. Dette viser at kondisjonalen mot høyre i (+) holder. Anta på den annen side at $\neg((Ax)\beta^*\ \hat{e}w)$. Siden w er maksimalt konsistent følger herav $(\neg(Ax)\beta^*)\hat{e}w$. Siden $\vdash \neg(Ax)\beta^* \leftrightarrow (Ex)\neg\beta^*$ og w er en maksimalt konsistent mengde kan vi slutte: (5) $(Ex)\neg\beta^*\hat{e}w$. Siden w har E-egenskapen har vi at $((Ex)\neg\beta^* \rightarrow \neg\beta^*;x[r])\hat{e}w$ der r er den spesielle konstanten forbundet med $(Ex)\neg\beta^*$. Fra dette og (5) følger, siden w er maksimalt konsistent, at $(\neg\beta^*;x[r])\hat{e}w$ for en eller annen konstant $r\hat{e}Const(L;c)$. Vi har derfor: $(Er)(r\hat{e}Const(L;c) \& \neg((\beta^*;x[r])\hat{e}w))$. Dette viser at kondisjonalen mot venstre i (+) holder.

Ad (++): Anta (6) $(Ac)(c\hat{e}D \rightarrow (M,w) \models \beta;x[n(c)])$. Vi tar sikte på å vise at høyre side i (++) holder. Anta derfor for vilkårlig r at (7) $r\hat{e}Const(L;c)$ Sett(6.1) $q=[r];w$. Da har vi (8) $q\hat{e}D$ og derfor ved hjelp av (6): $(M,w) \models \beta;x[n(q)]$. Ved hjelp av induksjonshypotesen følger fra dette (7) $(\beta;x[n(q)])^*\ \hat{e}w$. Nå har vi imidlertid:
(8) $(\beta;x[n(q)])^* = \beta^*;x[\xi(q)]$. Men $\xi(q)\hat{e}q$ og $r\hat{e}q$. Da har vi $(\xi(q)= r)\hat{e}w$. Fra dette, (7) og (8) følger: $\beta^*;x[r]\hat{e}w$. Dette viser at kondisjonalen mot høyre i (++) holder.

La oss så ta for oss kondisjonalen mot venstre: Anta
(9) $(Ar)(r\hat{e}Const(L;c) \rightarrow \beta^*;x[r]\hat{e}w)$. Anta videre at c er et vilkårlig valgt objekt der vi har at $c\hat{e}D$. Da har vi at $\xi(c)\hat{e}Const(L;c)$, og derfor ved hjelp av (9) at: (10) $\beta^*;x[\xi(c)]\hat{e}w$. Nå har man imidlertid: $\xi(c) = \xi(n;\text{-}1(n(c))$. Derfor har man $\beta^*;x[\xi(c)] = (\beta:x[n(c)])^*$ fra dette og (10) kan man slutte (11) $(\beta:x[n(c)])^*\hat{e}w$. Ved hjelp av induksjonshypotesen har så i sin tur: $(M,w) \models \beta;x[n(c)]$. Siden c var et vilkårlig objekt i C har vi derfor vist det vi ønsker, nemlig: $(Ac)(c\hat{e}D \rightarrow (M,w) \models \beta;x[n(c)])$. Vi har nå gitt et fullstendig bevis for (1).

(e) Vi må vise at $(M,w) \models T;c(\alpha) \leftrightarrow (T;c(\alpha)^*\hat{e}$ w om $\alpha\hat{e}CFm(L;c(D))$ og c enten er en konstant i L;c eller et navn på et element i D. Nå har man fra Definisjon10.2
(1) $(M,w) \models T;c(\alpha) \leftrightarrow [\neg(v(c)\hat{e}\varphi(\eta)(w)) \& \alpha\hat{e}\Phi(v(c),w)]$ v
$[v(c)\hat{e}\varphi(\eta)(w) \& (Aw')(w'\hat{e}I \& <w,w'>\hat{e}R;v(c) \rightarrow (M,w') \models\alpha]$
der v(c) er $\varphi(c)$ om c er en konstant i L;c og $v(c) = n;\text{-}1(c)$ om c er et navn i L;c(D).
Det vil være tilstrekkelig å vise følgende to ting:
(2) $\neg(v(c)\hat{e}\varphi(\eta)(w)) \rightarrow. (M,w) \models T;c(\alpha) \leftrightarrow (T;c(\alpha))^*\hat{e}$ w
(3) $v(c)\hat{e}\varphi(\eta)(w) \rightarrow. (M,w) \models T;c(\alpha) \leftrightarrow (T;c(\alpha))^*\hat{e}$ w
Vi gir først bevis for (2). I denne forbindelse beviser vi først kondsjonalen mot høyre. Anta derfor at (4) $\neg(v(c)\hat{e}\varphi(\eta)(w))$ og (5) $(M,w) \models T;c(\alpha)$. Vi må da vise $(T;c(\alpha))^*\ \hat{e}w$. Vi skiller mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): c er et navn. Da har vi : (6) $v(c) = n;\text{-}1(c)\hat{e}D$. Fra (1), (4) og (5) følger

© 2008 Morten Harboe Rognes

(7) $\alpha \hat{e} \Phi(v(c),w)$. Da har vi i lys av definisjonen av Φ ovenfor at $T;\xi(v(c))(\alpha^*)\hat{e}w$. Men i lys av (6) innebærer dette at $T;\xi(n;-1(c))(\alpha^*)\hat{e}w$. Men nå har vi i lys av definisjonen av operasjonen * at $T;\xi(n;-1(c))(\alpha^*) = (T;c(\alpha))^*$. Det følger derfor at $(T;c(\alpha))^*\hat{e}w$, som er det vi ønsker.

Tilfelle (ii): c er en konstant i L;c. Da har vi $v(c)=\varphi(c) =[c];w$. Fra (1), (4) og (5) følger naturligvis $\alpha \hat{e} \Phi(v(c),w)$. Det følger da ved hjelp av definisjonen av Φ at
(8) $T;\xi([c];w)(\alpha^*)\hat{e}w$. Nå har vi imidlertid at $\xi([c];w)\hat{e}[c];w$ og $c\hat{e}[c];w$. Dette innebærer at
(9) $(\xi([c];w) = c)\hat{e}w$. Siden alle instanser av identitetsaksiomene er med i en maksimalt konsistent mengde og w er en maksimalt konsistent mengde, kan vi fra (8) og (9) slutte at $T;c(\alpha^*)\hat{e}w$. Men i lys av definisjonen av operasjonen * er dette ekvivalent med $(T;c(\alpha))^* \hat{e}w$.

La oss så bevise kondisjonalen mot venstre i (2). Anta derfor (4) og at
(10) $(T;c(\alpha))^* \hat{e}w$. Igjen må vi skille mellom to tilfelle alt ettersom c er et navn eller c er en konstant i L;c.

Tilfelle (i): c er et navn. Da har $T;\xi(n;-1(c))\alpha^* = (T;c(\alpha))^*$. I lys av definisjonen av Φ følger da $\alpha \hat{e} \Phi(v(c),w)$ siden $v(c) = n;-1(c)$ i dette tilfelle. Herav følger så ,siden (1) holder, og vi antar (4), at $(M,w) \models T;c(\alpha)$

Tilfelle (ii): c er en konstant i L;c Da har vi $(T;c(\alpha))^* = T;c(\alpha^*)$ og derfor
(11) $T;c(\alpha^*)\hat{e}w$ i lys av (10). Men vi har at $(\xi([c];w) = c)\hat{e}w$. Siden w er maksimalt konsistent og derfor inneholder alle instanser av identitetsaksiomene, har vi fra dette og (11) at $T;\xi([c];w)(\alpha^*) \hat{e}w$. Ved hjelp av definisjonen av Φ følger da $\alpha \hat{e} \Phi([c];w, w)$ og derfor $\alpha \hat{e} \Phi(v(c),w)$. Herav følger så ved hjelp av (1) $(M,w) \models T;c(\alpha)$.

Dermed har vi vist at (2) holder.
Vi må naturligvis også vise at (3) holder. Vi viser først at dersom

(12) $v(c)\hat{e}\varphi(\eta)(w)$ & $(M,w) \models T;c(\alpha)$ holder så kan man slutte $(T;c(\alpha))^*\hat{e}w$. Anta derfor at (12) holder. Fra dette og (1) følger $(Aw')(w'\hat{e}I$ & $<w,w'>\hat{e}R;v(c) \rightarrow (M,w') \models \alpha)$
Ved hjelp av induksjonshypotesen følger så:

(13) $(Aw')(w'\hat{e}I$ & $<w,w'>\hat{e}R;v(c) \rightarrow \alpha^*\hat{e}w')$

Anta for reduktio ad absurdum at $\neg((T;c(\alpha))^*\hat{e}w)$. Siden w er en maksimalt konsistent mengde følger (14) $(\neg(T;c(\alpha))^*)\hat{e}w$.
Igjen finner vi det formålstjenlig å skille mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): c er et navn. Da har vi at $(T;c(\alpha))^* = T;\xi(n;-1(c))(\alpha^*)$ og derfor i lys av (14): $(\neg T;\xi(n;-1(c))(\alpha^*)) \hat{e}w$. Dette innebærer at (15) $CT;\xi(n;-1(c))(\neg\alpha^*)\hat{e}w$. Siden $v(c)=n;-1(c)$ har vi fra (12) og definisjonen av $\varphi(\eta)$ at (16) $\eta(\xi(n;-1(c))\hat{e}w$. Men fra (15) og (16) følger at det finnes en $w' \hat{e}I$ som er underordnet w med hensyn på $\xi(n;-1(c)$ og der
(17) $(\neg\alpha^*)\hat{e}w'$. Men da har vi ved hjelp av definisjonen av R at $<w,w'>\hat{e}R;v(c)$, siden $v(c)=n;-1(c)$ når c er et navn. Fra dette og (13) følger $\alpha^*\hat{e}w'$ men dette strider mot (17) siden w' er en maksimalt konsistent mengde. Vi må altså i dette tilfellet ha at $(T;c(\alpha))^*\hat{e}w$

Tilfelle (ii): c er en konstant i L;c. I dette tilfelle har vi $\neg(T;c(\alpha))^* = \neg T;c(\alpha^*)$. Fra dette og (14) har vi $(\neg T;c(\alpha^*))\hat{e}w$. Siden w er maksimalt konsistent følger
(18) $CT;c(\neg\alpha^*)\hat{e}w$. Siden c er en konstant har vi $v(c) = \varphi(c)=[c];w$ og derfor ved hjelp av (12) i lys av definisjonen av $\varphi(\eta)$ at $\eta(\xi([c];w))\hat{e}w$. Men vi har $(\xi([c];w = c)\hat{e}w$ og derfor, siden alle instanser av identitetsaksiomene er med i w, og w er maksimalt konsistent, at $CT;\xi([c];w)(\neg\alpha^*)\hat{e}w$ Det følger at det finnes en $w'\hat{e}I$ som er underordnet w med hensyn på $\xi([c];w)$ og der vi har $\neg\alpha^*\hat{e}w'$. Men $v(c) = [c];w$. Det følger derfor at $<w,w'>\hat{e}R;v(c)$. Sammen med (13) impliserer dette $\alpha^*\hat{e}w'$. Men dette er umulig siden $\neg\alpha^*\hat{e}w'$. og w' er maksimalt konsistent. Heller ikke i dette tilfelle kan vi ha $\neg((T;c(\alpha))^*\hat{e}w)$. Det følger at $(T;c(\alpha))^*\hat{e}w$. Dette er hva vi ønsker. Vi har dermed vist halvdelen mot høyre i (3).

Vi må imidlertid også vise: $v(c)\hat{e}\varphi(\eta)(w) \rightarrow$. $(T;c(\alpha))^*\hat{e}w \rightarrow (M,w) \models T;c(\alpha)$.
Anta derfor (19) $v(c)\hat{e}\varphi(\eta)(w)$ & $(T;c(\alpha))^*\hat{e}w$. Igjen skiller vi mellom to tilfelle:

© 2008 Morten Harboe Rognes

Tilfelle (i): c er et navn. Da v(c) = n;-1(c). Fra dette og den første konjunkten i (19) følger (20) η(ξ(n;-1(c)))êw. Siden c er et navn har vi også at (T;c(α))* = T;ξ(n;-1(c))(α*). Fra dette følger ved hjelp av den andre konjunkten i (19) at (21) T;ξ(n;-1(c))(α*)êw. Anta nå for vilkårlig w' at <w,w'>êR;v(c). Det følger da at w' er underordnet w med hensyn på ξ(n;-1(c)). Men i lys av (21) må da α*êw'. I lys av induksjonshypotesen har vi da (M,w') ⊨α.
Siden w' var vilkårlig følger: (Aw')(w*êI& <w,w'>êR;v(c). → (M,w') ⊨ α). Herav har vi så det vi ønsker: (M,w) ⊨ T;c(α).

Tilfelle (ii): c er en konstant i L;c. Da har vi v(c) = [c];w. Fra dette, den første konjunkten i (19) η(ξ([c];w))êw Videre følger i dette tilfellet fra den andre konjunkten i (19) at (22) T;c(α*)êw. Vi har, på samme måte som tidligere, at (ξ([c];w) = c)êw. Det følger derfor ved hjelp av (22), siden alle instanser av identitetsaksiomene er med i w og w er en maksimalt konsistent mengde at (23) T;ξ([c];w)(α*) êw. Anta nå for vilkårlig w'êI at <w,w'>êR;v(c). Da følger at w' er underordnet w med hensyn på ξ([c];w). Men fra dette og (23) har vi α*êw. Ved hjelp av induksjonshypotesen kan vi fra dette slutte (M,w') ⊨ α. Siden w' var vilkårlig har vi vist: (Aw')(w*êI & <w,w'>êR;v(c). → (M,w') ⊨ α). Men herav følger
(M,w) ⊨ T;c(α).

I begge tilfellene har vi: (M,w) ⊨ T;c(α). Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for (3). Med dette har vi også gitt et fullstendig bevis for Teorem 18.1. **QED**.

Samler man sammen trådene fra §14 frem til dette punkt ser man at vi har samlet sammen det materiale som er nødvendig for å bevise den følgende sats:

Teorem 18.2 Anta at L er språk for doxastisk logikk, og at Δ er en mengde med lukkede formler i L. Er da Δ konsistent med hensyn på Kη- utvidet med E1, E2 og TBF finnes det en relasjonell struktur
M=< D,I,<R;x>/xêD/,Φ,φ>, og et element w0êI, slik at (Aα)(αêΔ → (M,w;0) ⊨ α)

Ved en nærmere inspeksjon av det vi har gjort ovenfor er det også mulig å bevise det følgende teorem:

Teorem 18.3 Anta at L er språk for doxastisk logikk, og at Δ er en mengde med lukkede formler i L. Er da Δ konsistent med hensyn på Kη+ finnes det en relasjonell struktur
M=< D,I,<R;x>/xêD/,Φ,φ>, som oppfyller kravet
(Ax)(Aw) (wêI & xêD & xêφ(η)(w) → (Ew')(<w,w'>eR;x)),
og et element w0êI, slik at (Aα)(αêΔ → (M,w;0) ⊨ α)

Bevis for Teorem 18.2 Anta L er et språk for doxastisklogikk og at Δ er en mengde med lukkede formler i L som er konsistent med hensyn på K=Kη-[E1,E2, TBF]. Vi skal da vise at det finnes en relasjonell struktur M' = < D',I',<R';x>/xêD/',Φ',φ'>, samt et element w0 i I der alle formlene i Δ er sanne. Denne relasjonelle strukturen konstrueres på følgende måte. Vi utvider først L til L;c ved å legge til spesielle konstanter på den måten som ble utførlig redegjort for i §14. Vi kaller kalkylen K med språket utvidet til L;c på denne måten for K;c. Man ser da lett at Δ vil være konsistent med hensyn på L;c. Vi utvider så Δ til Δ' ved å legge til enhver formel fra hver eneste E-form på den måten som er beskrevet innledningsvis i §17. Δ' utvides så til en maksimalt konsistent mengde Γ. Denne maksimalt konsistente mengden, som vil være en Henkin-mengde, betegnes med w;0. Med ugangspunkt i w;0 konstruerer vi så et tre av underordnede mengder på nøyaktig den måten som ble skrevet i §17 og §18. Vi konstruerer så

© 2008 Morten Harboe Rognes

en relasjonell modellstruktur M = < D,I,<R;x>/xêD/,Φ,φ> for L;c slik som angitt i sistnevnte, det vi si denne, paragrafen. Ved hjelp av Teorem 18.1 har vi så for alle formler αêCFm(L;c(D)) og alle wêI at (1) (M,w) ⊨ α ↔ αêw. Dette gjelder selvfølgelig også for w;0. Vi har derfor (2) (M,w;0) ⊨ α ↔ αêw;0. Men vi har Δ Inkl Δ' Inkl Γ=w;0. Det følger at (Aα)(αêΔ → αêw;0). Fra dette og (2) følger så at
(3) (Aα)(αêΔ → (M,w;0) ⊨α). Vi er nå like ved målet, men modellstrukturen M er en modellstruktur for L;c og ikke en modell for L. Vi danner nå restriksjonen M'=< D',I',<R';x>/xêD/',Φ',φ'> av M til L. Dette innebærer at vi kan la D'=D, I'=I, R';x for de diverse xêD være identisk med R;x. Det eneste er at vi må begrense φ i M til de konstantene som forekomer i L og tilsvarende begrense Φ(x,w) der xêD og wêI til

Mg(α: T;ξ(x)((α)*)êw & αêCFm(L(D)))

Defineres M' på denne måten verifiserer man lett at

(4) (Aα)(Aw)(αêCFm(L(D) & wêI → (M',w) ⊨ α ↔ (M,w) ⊨ α)

Men fra dette og (3) følger detvi ønsker, nemlig: (Aα)(αêΔ → (M',w;0) ⊨ α). Dette avslutter beviset for Teorem 18.2. **QED.**

Bevis for Teorem 18.3 Beviset for denne satsen er nøyaktig som for Teorem 18.2, borsett fra at vi må vise at modellstrukturen som konstrueres oppfyller kravet

(+) (Ax)(Aw) (wêI & xêD & xêφ(η)(w) → (Ew')(<w,w'>eR;x)),

Studerer man nøye konstruksjonen av en underordnet maksimaltkonsistent mengde som vi gikk igjennom i§17, ser man ganske raskt at vi ikke på noe punkt i konstruksjonen benytter oss av aksiomet A2, η(x) → ¬ T;x(α& ¬α). Dette er ekvivalent med η(x) → CT;x(¬(α& ¬α)). Hvis derfor Δ er en maksimalt konsistent mengde med E-egenskapen kan det være at η(a)êΔ for noen konstanter a uten at det finnes noen formler β slik at CT;a(β)êΔ. En slik maksimalt konsistent mengde vil ikke ha noen underordnete mengder med hensyn på a. A2 derimot garanterer at man alltid kan finne en slik underordnet mengde. Dette innebærer at den kanoniske modellen som vi konstruerte i dette avsnittet vil oppfylle kravet (+). **QED.**

§19 Diskusjon av fullstendighetsbeviset og de resultatene som har blitt oppnådd

Det følger fra Teorem 18.3 og gyldighetsteoremene vi tidligere har vist at man har:

Teorem 19.1 Anta L er et språk for doxastisk logikk og at α er en vilkårlig formel i L. Da har vi at Kη+ |- α hvis og bare hvis α er gyldig i enhver relasjonell modell for L som oppfyller kravet om serialitet.

Bevis: Kondisjonalen mot høyre i denne satsen følger umiddelbart fra gyldighetsteoremene som det ble gjort rede for i §12. Anta på den annen side at vi har ¬ (Kη+|-α). Da må vi også ha ¬(Kη+ |- (Ax;1)...(Ax;n)α), der x;1,...,x;n er de variablene som forekommer fri i α. Da følger det at formelmengden {¬((Ax;1)...(Ax;n)α)} er konsistent med hensyn på Kη+. Ved hjelp av Teorem 18.3 følger da at det finnes en relasjonell modell M=< D,I,<R;x>/xêD/,Φ,φ> som oppfyller kravet om serialitet slik at (M,w) ⊨ ¬((Ax;1)...(Ax;n)α) for en eller annen verden wêI. Da må det finnes en M-instans α' av α slik at (M,w) ⊨ α'. Men da kan ikke enhver M-instans av α være sann i enhver verden i M. Det følger at α ikke er gyldig i M, og derfor heller ikke i enhver relasjonell modell for L. **QED.**

© 2008 Morten Harboe Rognes

I §11 viste vi til enhver relasjonell modell kunne konstruere en Kη+-modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn som verfiserte nøyaktig de samme formlene. Vi viste også det omvendte. Fra dette følger at en formel er gyldig i enhver relasjonell modellstruktur hvis og bare hvis den er gyldig i enhver Kη+-modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn. Fra dette og Teorem 19.1 følger det at vi har:

Teorem 19.2 Anta L er et språk for doxastisk logikk og at α er en vilkårlig formel i L. Da har vi at Kη+ |- α hvis og bare hvis α er gyldig i enhver Kη+-modellstruktur for L basert på finstrukturerte utsagn.

Vi må også vise at Kη+ er fullstendig med hensyn på klassen av alle Kη+-modellstrukturer for L basert på unormale verdener. Det kan da også gjøres. Vi har:

Teorem 19.3 Anta L er et språk for doxastisk logikk og at α er en vilkårlig formel i L. Da har man at Kη+ |- α hvis og bare hvis α er gyldig i enhver Kη+-modellstruktur for L basert på unormale verdener.

Bevis: At ethvert teorem i Kη+ er gyldig i alle Kη+-modeller for L basert på unormale verdener følger umiddelbart fra Teorem 6.2. Anta på den annen side at ¬(Kη+ |- α). Da har vi naturligvis, dersom x;1,... ,x;n er de variabeltegnene i α som forekommer fri, at {¬ (Ax;1)...(Ax;n)α} er konsistent med hensyn på Kη+. Fra dette og Teorem 18.3 følger det at det finnes en relasjonellstruktur M=< D,I,<R;x>/xêD/,Φ,φ> og et element w0êI, slik at (Aα)(αêΔ → (M,w;0) ⊨ ¬ (Ax;1)...(Ax;n)α). Fra Teorem 11.1 følger det da at det finnes en Kη+-modellstruktur basert på finstrukturerte utsagn M* =< D*,I*,U*,σ*,φ*,f*> som oppfyller de følgende krav:

(i) D= D* og I = I*

(ii) Er β êCfm(L(D)) har vi for alle wêI at (M,w) ⊨ β ↔ (M*,w) ⊨ β

Her av følger (1) (M*,w) ⊨ ¬ (Ax;1)...(Ax;n)α). Men siden det finnes en Kη+-modellstruktur M* basert på finstrukturerte utsagn M* som er slik at (1) har vi ved hjelp av Teorem 9.2 at det finnes det en Kη+- modellstruktur M' = <D',C',I',q',V'> basert på unormale verdener som oppfyller de følgende tre krav:

(2) C' = I og D'=D

(3) For alle wêI' og for alle αêCFm(L(D)) gjelder:
(M',w) ⊨ α ↔ (M,w) ⊨ α

(4) La Q være mengden av alle de lukkede formler i L(D) som ikke innholder noen konstanter hentet fra L. Da oppfyller M' det følgende krav:

(#) (Aα)(Aβ)(α,βêQ & α≠β →
Mg(w: wêI & (M',w) ⊨ α) ≠ Mg(w: wêI & (M',w) ⊨ α))

Fra (1) og (3) følger naturligvis (4) (M',w) ⊨ ¬ (Ax;1)...(Ax;n)α). Men denne modellstrukturen M' som oppfyller de tre kravene ovenfor er en Kη+-modellstruktur for L basert på unormale verdener der vi har at (4) holder for en eller annen verden wêC'. Det følger at α ikke kan være gyldig i enhver Kη+-modellstruktur for L basert på unormale verdener. Dette avslutter beviset for Teorem 19.3. **QED**.

På akkurat samme måte som ved i forbindelse med systemet Kη+ har bevist satsene Teorem 19.1 - 19.3 kan vi bevise tilsvarende teoremer for systemet Kη-[E1,E2,TBF]. I stedet for å oppsummere resultatene for dette system i tre forskjellige teoremer samler vi dem sammen i én sats:

© 2008 Morten Harboe Rognes

Teorem 19.4 Anta L er et språk for doxastisk logikk og at α er en formel i L. Da er de følgende fire betingelser ekvivalente:

(a) Kη- [E1,E2,TBF] |- α
(b) α er gyldig i alle relasjonelle modelstrukturer for L
(c) α er gyldig i alle Kη- -modellstrukturer for L basert på finstrukturerte utsagn som oppfyller det strenge konjunksjonskravet
(d) α er gyldig i alle Kη- -modellstrukturer for L basert på unormale verdener som oppfyller det strenge konjunksjonskravet.

I §9 betraktet vi noen satser hvor vi betraktet det følgende krav som kan stilles til en modellstruktur M=<D,C,I,q,V> basert på unormale verdener. Kravet var dette:

(+) La Q være mengden av alle de lukkede formler i L(D) som ikke innholder noen konstanter hentet fra L. Da oppfyller M det følgende krav:

$$(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Q \ \& \ \alpha \neq \beta \ \rightarrow \ Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \alpha) \neq Mg(w: w \hat{e} I \ \& \ (M,w) \models \beta))$$

Vi betegnet i §12 mengden av alle de modellstrukturer for L som er basert på unormale verdener og som oppfyller kravet ovenfor med a. a var det en delmengde av a* som betegnet mengden av absolutt alle modellstrukturer for L basert på mulige verdener. Naturligvis er da klassen a inkludert i klassen a*. Enhver formel i L som er gyldig i enhver struktur i a* vil derfor også være gyldig i enhver struktur i a. Spørsmålet er om det omvendte gjelder. Vil enhver formel i L som er gyldig i alle strukturer i a også være gyldig i alle strukturene i a*? Svaret på dette er bekreftende. For anta at en formel α er gyldig i enhver struktur som er med i a. Da har vi i kraft av eksvivalensteoremet, Teorem 9.9, at α er gyldig i enhver Kη+-modellstruktur for L basert på finstrukturerte utsagn. Ved hjelp av Teorem 19.2 ser man at dette holder hvis og bare hvis Kη+ |-α. Men fra dette og Teorem 6.2 følger at α er gyldig i alle modellstrukturer for L basert på unormale verdener, dvs. a*. Vi har derfor at følgende holder:

Teorem 19.5 Anta L er et språk for doxastisk logikk og at α er en formel i L. Da har vi at at α er gyldig i enhver Kη+-modellstruktur for L basert på unormale verdener som oppfyller kravet (+) ovenfor hvis og bare hvis α er gyldig i enhver Kη+ -modellstruktur for L som er basert på unormale verdener.

Ovenfor har vi betraktet vi betraktet de ordinære Kη+-modellstrukturene for L basert på unormale verdener. Men vi kunne på samme måte betrakte de Kη- -modellstrukturene for L basert på unormale verdener som oppfyller det strenge konjunksjonskravet. I §12 betegnet vi mengden av alle disse strukturene med b*. Klassen av de strukturene i b* som oppfylte kravet (+) ovenfor i tillegg, betegnet vi med b. Naturligvis vil en formel som er gyldig i alle strukturene i den mer omfattende klassen b* også være gyldige i alle strukturer i b. Spørsmålet er om det omvendte gjelder, om altså enhver formel som er gyldig i enhver struktur i b også er gyldig i enhver struktur i b*. Igjen er svaret bekreftende. Anta α er en formel i L som er gyldig i alle Kη- -modellstrukturer for L basert på unormale verdener og som oppfyller kravet (+) og det strenge konjunksjonskravet, mao. er α gyldig i alle elementer i b. Ved hjelp av Teorem 9.9 ser man da at α også vil være gyldig i alle Kη- -modellstrukturer for L basert på finstrukturerte utsagn som oppfyller det sterke konjunksjonskravet. men i lys av Teorem 19.4 har vi da at Kη-[E1,E2,TBF]|- α. Ved hjelp av det samme teorem har vi så at α er gyldig i enhver Kη--modell

© 2008 Morten Harboe Rognes

basert på finstrukturerte utsagn som oppfyller det strenge konjunksjonskravet. Vi har derfor at følgende gjelder:

Teorem 19.6 Anta L er et språk for doxastisk logikk og at α er en formel i L. Da har vi at at α er gyldig i enhver Kη- -modellstruktur for L basert på unormale verdener som oppfyller kravet (+) ovenfor og det strenge konjunksjonskravet hvis og bare hvis α er gyldig i enhver Kη- -modellstruktur for L som er basert på unormale verdener og som oppfyller det strenge konjunksjonskravet.

Det kan virke skuffende atvi bare har greid å vise fullstendigheten til kalkylene Kη+ og Kη-[E1,E2,TBF]. Skulle det ikke også væremulig å vise korresponderende resultater for Kη[E1,E2] og Kη-[E1,E2]? Det virker i og for seg ikke usannsynlig at disse kalkylene er fullstendige med hensyn hensyn på henholdsvis mengden av Kη-modeller for L som er basert på unormale verdener og den tilsvarende klassen av Kη- -modellstrukturer. I det minste virker det vrient å skjønne hva det er som prinsipielt skulle kunne gå imot en slik påstand. Det er derfor i nærliggende å gjette på at dette er tilfelle. Ser vi derimot på de relasjonelle strukturene for L er det klart at vi må revidere denne typen semantikk ganske drastisk for å få den til å passe med Kη og Kη- utvidet med E1 og E2. Grunnen til dette er at slik vi har formelt definisjonen av en relasjonell modell vil umiddelbart den doxastiske varianten sv Barcan-formelen, TBF, være gyldig. Dette er fordi domenet D er konstant og gitt helt uavhengig av de mulige verdnene. Modifiserte man disse modellene slik at man til hver verden w assosierte et bestemt domene D;w og anordnet det slik at man i hver verden w bare kvantifiserer over objektene i D;w kan man ikke lenger vise at TBF holder. For å sørge for at E1 og E2 holder om modellene revideres på denne måten må man trolig kreve at D;w er inkludert i D;w' om man har <w,w'>êR;x der x er et individ i w hvor trosfeltet er rasjonelt organisert.

Uansett ser man at det fullstendighetsbeviset vi har gitt må revideres ganske drastisk. TBF ble på vesentlig vis brukt i en del sentrale hjelpesetninger i §16 , spesielt Lemma 16.1. I sin tur ble dette Lemma brukt når vi skulle konstruere treet av maksimalt konsistente mengder som utgjør verdenene i den kanoniske modellen vi konstruerer. Videre trengs dette aksiomet når vi skal vise at domenet av objekter det kvantifiseres over er det samme i alle verdener. Et fullstendighetsbevis for Kη[E1,E2] og Kη-[E1,E2] må derfor nødvendigvis få en annen struktur en det vi har gitt.

Enda større revisjoner i de semantiske teoriene vi har arbeidet merdher trengs om man skal konstruere en semantikk for de langt svakere systemene Kη og Kη-. Trolig må man da istedet for mulige individer innføre det man kunne kalle individuerende funksjoner. De individene man kvantifiserer over blir i så fall funksjoner f i mengden D^I. f(w) vil da representere individet f slik det fremtrer i verdenen w. f(w') det samme individ slik det fremtrer i verdenen w'. To individer f og g er identiske i verdenen w hvis og bare hvis de faller sammen i denne verdenen w, det vil si om f(w) = g(w). Men vi skal ikke fremsettenoen detaljert semantikk for disse systemene her. Heller ikke skal vi begi oss inn på å drøfte forskjellige muligheter når det gjelder konstruksjon av et bevis for fullstendighet for disse systemene.

§20 Avslutning

Det har hovedsakelig vært to forhold som vi har ønsket å belyse under utarbeidelsen av dette skrift. Det ene har vært å utforme semantiske teorier for de kalkylene vi presenterte i Rognes [1]. Som man har sett er det mulig å utforme flere slike teorier. Delvis har vi undersøkt teorier basert på ideen om unormale verdener. Delvis har vi sett på teorier hvor et grunnleggende begrep har vært det vi har tillatt oss å kalle "finstrukturerte utsagn". Delvis har

© 2008 Morten Harboe Rognes

vi sett på teorier der det innføres en alternativrelasjon over de mulige verdene indeksert på hvert individ x i domenet. D Er en verden w' et alternativ til en verden w med hensyn på et slikt individ x er tanken at verdenen w' er logisk sett forenelig med mengden av alle de utsagn som x tror beskriver forhold som faktisk foreligger. Vi har altså formulert eksplisitt tre forskjellige teorier. En viktig del av dette arbeidet har vært å undersøke de innbyrdes sammenhengene mellom disse teoriene som tilsynelatende er basert nokså forskjellige idéer. De viktigste resultatene vi har oppnådd i denne forbindelse er de som er oppsummert i §12. Som man ser fra det som der er skrevet er det en utstrakt ekvivalens mellom strukturene som man arbeider med innenfor de forskjellige teoriene. På et vis viser de forskjellige semantiske teoriene vi har utformet forskjellige sider ved de kalkylene som har blitt formulert. Det er derfor av interesse å se hvordan disse teoriene er relatert innbyrdes og få et presist bilde av disse relasjonene. Den første delen av dette essay bidrartil dette.

I den andre delen av dette skrift av har vi vist at to av de kalkylene i det mangfold av kalkyler som vi redegjorde for i §3.1 er fullstendige. Man kunne på dette punkt ha ønsket mer, og det må medgis at våre resultater på dette punkt er fragmentariske. Men det er intet som skulle tilsi at det ikke er mulig å gå langt mer i dybden når det gjelder spørsmål av denne typen enn det vi har vært istand til å gjøre. Men vi har strukket oss så langt vi har kunnet med de midler vi har hatt til rådighet. Det er ingen grunn til å undervurdere den betydning og interesse fullstendighetsbevis har på et område som dette. Når man arbeider med kalkyler av den type vi her har fokusert på oppstår problemer av denne art på en helt naturlig måte. I mange tilfelle dreier det seg om genuint vanskelige problemer. Det er da alltid fristende å si gjøre seg ferdig med problemene ved å si at de er uten noen dypere betydning, og at en løsning av dem ikke bidrar til å kaste lys over mer opphøyde problemer som noen mener har større filosofisk interesse. Men selvfølgelig løser man intet problem ved å feie det inn under teppet.

Et sentralt begrep i de semantiske teoriene vi har utformet er mengden av alle de utsagn som beskriver forhold et individ x i verdenen w tror foreligger. Man kunne kalle dette "trosfeltet" til individet x i verdenen w. Et individs trosfelt i denne betydning synes ikke å være noe annet enn det som i endel annen filosofisk litteratur går under navnet "horisont" og "forståelseshorisont". Naturligvis vil en persons trosfelt, alt vedkommende tror, trivielt bestemme hva vedkommende faktisk mener er tilfelle, og derfor individets bilde av virkeligheten. Det vil også bestemme det bildet vedkommende har av det samfunn som vedkommende lever i, det bilde vedkommende har av den fysiske natur, av andre mennesker og seg selv. Våre logiske undersøkelser er derfor utvilsomt knyttet til en rekke begreper som har blitt tilskrevet en viss vekt. Vi har tillatt oss å kalle trosfeltet til et individ x i verdenen w for *logisk sett rasjonelt organisert* dersom det inneholder alle utsagn som representerer nødvendige sannheter, er lukket under logisk konskevens, er konjunktivt lukket og dessuten er konsistent. Det er ingen grunn til å tro at et individs trosfelt under alminnelige omstendigheter oppfyller disse ganske sterke krav. Vanligvis har vi en relativt begrenset forståelse av hva som logisk sett følger fra det vi tror, selvom man ikke helt skal undervurdere sansen for logisk konsekvens. I visse uheldige tilfelle er det desverre slik at deler av et individs trosfelt kan være inkonsistent med visse andre deler. Men heller ikke i denne forbindelse synes det berettiget å trekke for vidtgående slutninger. Det man imidlertid ikke kan betvile er at det logisk sett rasjonelle trosfelt er et ideal. Noe man bør strekke seg etter. Man kunne sammenfatte våre undersøkelser ved å si at vi har forsøkt å systematisere de slutninger man kan trekke dersom man antar at en persons trosfelt er rasjonelt logisk organisert i den betydning vi har angitt.

© 2008 Morten Harboe Rognes

Referanser

Chellas [1] Chellas, Brian F.1980.*Modal Logic, an Introduction*. London: Cambridge University Press

Hughes and Cresswell [1] Hughes, G.E og Cresswell, M. J.1968. *An Introduction to Modal Logic*. London: Methuen

Rognes [1] Rognes, Morten, 2007, *Noen syntaktiske derivasjoner i den doxastiske predikatlogikken Kη og enkelte beslektede kalkyler*, Upublisert manuskript

Rognes [2] Rognes, Morten, 2007, *Fullstendighetsbevis for den doxastiske setningslogikken Kη og noen relaterte kalkyler*, Upublisert manuskript

Shoenfield [1] Shoenfield, J.R., 1967, *Mathematical Logic*, London: Addison-Wesley Publishing Company

© 2008 Morten Harboe Rognes